Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

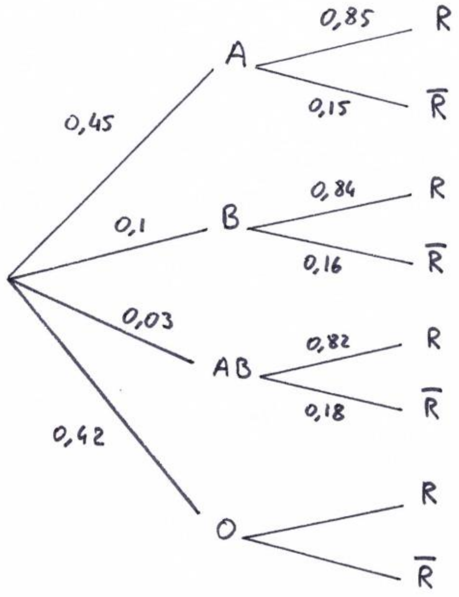
Session 2025

Métropole – Sujet 1

17 juin 2025

Ex 1 :

1)



2) $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,1 \times 0,84 = \boxed{0,084}$

En choisissant au hasard une personne dans la population française, la probabilité de tomber sur un individu de groupe B et de rhésus positif est de 0,084.

3) $\{A\,;\,B\,;\,AB\,;\,O\}$ forme un système complet d'événements

Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R)$$
$$= P(A) \times P_A(R) + 0,084 + P(AB) \times P_{AB}(R) + P(O) \times P_O(R)$$
$$= 0,45 \times 0,85 + 0,084 + 0,03 \times 0,82 + 0,42 \times P_O(R)$$
$$= 0,3825 + 0,084 + 0,0246 + 0,42 \times P_O(R)$$
$$= 0,4911 + 0,42 \times P_O(R)$$

On $P(R) = 0,8397$

D'où $0,4911 + 0,42 \times P_O(R) = 0,8397$

$\iff 0,42 \times P_O(R) = 0,3486$

$\iff P_O(R) = \dfrac{0,3486}{0,42}$

$\iff \boxed{P_O(R) = 0,83}$

4) $P(O \cap \overline{R}) = P(O) \times P_O(\overline{R}) = 0,42 \times (1 - P_O(R)) = 0,42 \times (1 - 0,83)$

D'où $P(O \cap \overline{R}) = 0,42 \times 0,17 = \boxed{0,0714}$

5) a) On répète $n = 100$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "l'individu est un donneur universel" est égale à $p = P(O \cap \overline{R}) = 0,0714$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0,0714)}$

b) On utilise la fonction de répartition de la calculatrice :

$\boxed{P(X \leqslant 7) \approx 0,577}$ (à 10^{-3} près)

c) $X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0,0714)$

D'où $E(X) = n \times p = 100 \times 0,0714 = \boxed{7,14}$

et $V(X) = n \times p \times (1-p) = 100 \times 0,0714 \times (1 - 0,0714) = 7,14 \times 0,9286$

$= 6,630204$

$\boxed{\approx 6,63}$ à 10^{-2} près

6) ⓐ Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $M_N = \frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^{N} X_k$

M_N représente $\boxed{\text{la variable aléatoire moyenne des } X_k}$, $k \in [\![1;N]\!]$

$\boxed{\text{Elle renvoie la moyenne du nombre de donneurs universels dans les } N \text{ villes, pour un échantillon de 100 personnes par ville.}}$

ⓑ Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_N) = E\left(\frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^{N} E(X_k)$$

or $\forall k \in [\![1;N]\!]$, $E(X_k) = 7,14$

$$\text{D'où } E(M_N) = \frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^{N} 7,14 = \frac{1}{N} \times 7,14 \times (N-1+1) = \frac{1}{\cancel{N}} \times 7,14 \times \cancel{N}$$

$$\iff \boxed{E(M_N) = 7,14}$$

ⓒ Les variables aléatoires X_k sont indépendantes, donc on a :

$$V(M_N) = V\left(\frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \times V\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) \underset{\text{indépendance}}{=} \frac{1}{N^2} \times \sum_{k=1}^{N} V(X_k)$$

Or $\forall k \in [\![1;N]\!]$, $V(X_k) = 6,63$

$$\text{D'où } V(M_N) = \frac{1}{N^2} \times \sum_{k=1}^{N} 6,63 = \frac{1}{N^2} \times 6,63 \times (N-1+1) = \frac{1}{N^{\cancel{2}}} \times 6,63 \times \cancel{N}$$

$$\iff \boxed{V(M_N) = \frac{6,63}{N}}$$

d) Tout d'abord, on a : $7 < M_N < 7,28 \iff 7-7,14 < M_N - 7,14 < 7,28-7,14$

$$\iff -0,14 < M_N - E(M_N) < 0,14$$

$$\iff |M_N - E(M_N)| < 0,14$$

Puis on veut : $P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$

$$\iff P(|M_N - E(M_N)| < 0,14) \geqslant 0,95$$

$$\iff 1 - P(|M_N - E(M_N)| \geqslant 0,14) \geqslant 0,95$$

$$\iff P(|M_N - E(M_N)| \geqslant 0,14) \leqslant 0,05$$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|M_N - E(M_N)| \geqslant 0,14) \leqslant \frac{V(M_N)}{0,14^2}$$

Il suffit donc de choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tq :

$$\frac{V(M_N)}{0,14^2} \leqslant 0,05 \iff V(M_N) \leqslant 0,05 \times 0,14^2$$

$$\iff \frac{6,63}{N} \leqslant 9,8 \times 10^{-4}$$

car $N > 0$

$$\iff N \geqslant \frac{6,63}{9,8 \times 10^{-4}}$$

Or $\frac{6,63}{9,8 \times 10^{-4}} \approx 6765,3$ et on veut $N \in \mathbb{N}^*$

Donc il faut $\boxed{\text{au moins } N = 6766}$ villes.

Ex 2 :

⇒ Partie A :

1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}_A$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

comme $\mathcal{T}_A = (AC)$, on a :

$$f'(1) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

2) $f'(a) = 0$ lorsque $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.

Sur $]0;3]$, $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes horizontales, aux points d'abscisse $x \approx 0{,}35$ et $x \approx 1{,}65$ (avec la précision autorisée par le graphique).

Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet 2 solutions dans $]0;3]$

3) D'après le graphique, f est concave sur $]0;b]$ avec $b \approx 0{,}8$

D'où $\forall x \in]0;b]$, $f''(x) \leqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{f''(0{,}2) \leqslant 0}$

Par ailleurs, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = 0{,}2$ n'est clairement pas un point d'inflexion.

On peut donc supposer que $f''(0{,}2) < 0$, mais ce n'est pas une certitude car un point d'inflexion nécessite 2 conditions (f'' s'annule et change de signe).

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x\left(2.(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right)$

1) On a : $2X^2 - 3X + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$

Donc l'équation ne possède aucune solution réelle : $\boxed{S = \emptyset}$

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses $\Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ car $x \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$

Or l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ ne possède aucune solution réelle.

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ ne coupe pas l'axe des abscisses.}}$

2) $\forall x > 1$, $f(x) = x.(\ln x)^2 \times \left(2 - \dfrac{3}{\ln x} + \dfrac{2}{(\ln x)^2}\right)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

On obtient ensuite que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{(\ln x)^2} = 0$

Donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{3}{\ln x} + \dfrac{2}{(\ln x)^2} = 2 + 0 + 0 = 2$

Enfin, par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3) a) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et on donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x + \frac{1}{x} + 0$

$$= \frac{1}{x}\left(4.\ln x + 1\right)$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \geqslant 0 \iff 4\ln x + 1 \geqslant 0$

$\iff 4\ln x \geqslant -1$

$\iff \ln x \geqslant -\frac{1}{4}$

$\iff x \geqslant e^{-\frac{1}{4}}$ par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

x	0	$e^{-0,25}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave	inflexion	convexe

L'abscisse du point d'inflexion est $\boxed{x_I = e^{-\frac{1}{4}}}$

c) On a $x_I = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$

Or $x_B = e > x_I$

Et comme f est convexe sur $[x_I ; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes dont le point de tangence possède une abscisse dans cet intervalle. Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de } \mathcal{T}_B \text{ sur } [1 ; +\infty[}$

$\Rightarrow$ Partie C :

1) On a $B(e\,;e)$ donc $x_B = e$ et $f(x_B) = e$

Par ailleurs $f'(x_B) = f'(e) = 2\times(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2\times 1^2 + 1 - 1 = 2$

D'où T_B a pour équation réduite :

$y = f'(x_B)\times(x - x_B) + f(x_B)$

$\Leftrightarrow y = 2(x-e) + e$

$\Leftrightarrow y = 2x - 2e + e$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 2x - e}$

2) Pour calculer $\int_1^e x.\ln x.\,dx$, on procède par intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[1\,;e]$:

$u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

D'où $\int_1^e x.\ln x.\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2.\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2.\,dx$

$= \frac{1}{2}\times e^2\times\ln e - \frac{1}{2}\times 1^2\times\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x.\,dx$

$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$

$= \frac{2e^2}{4} - \frac{1}{4}(e^2 - 1^2)$

$\boxed{= \frac{e^2+1}{4}}$

3) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e \left(f(x) - (2x - e)\right) dx$

$= \displaystyle\int_1^e \left(2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 2x - 2x + e\right) dx$

$= \displaystyle\int_1^e \left(2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + e\right) dx$

$= 2\displaystyle\int_1^e x.(\ln x)^2 dx - 3\int_1^e x\ln x.dx + \int_1^e e\, dx$

$= 2 \times \dfrac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \dfrac{e^2+1}{4} + e \times \left[x\right]_1^e$

$= \dfrac{2e^2 - 2 - 3e^2 - 3}{4} + e(e-1)$

$= \dfrac{-e^2 - 5}{4} + e^2 - e$

$= \dfrac{-e^2 - 5 + 4e^2 - 4e}{4}$

$\boxed{= \dfrac{3e^2 - 4e - 5}{4}}$ u.a.

Ex 3 :

1) $\boxed{\text{Affirmation 1 : Vraie}}$

Dans le R.O.N. $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AB} = -2.\vec{u}$

On a donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AB) et $B\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \in (AB)$

Donc $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (AB) \iff \overrightarrow{BM} = t.\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} x-3 = t\times(-2) \\ y-2 = t\times(-1) \\ z-(-1) = t\times 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-t \\ z = -1+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(OU) On peut s'assurer que les coordonnées des points A et B vérifient bien la représentation paramétrique proposée.

Pour $A\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} -1 = 3-2t \\ 0 = 2-t \\ 5 = -1+3t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 3+1 \\ t = 2 \\ 3t = 5+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{4}{2} = 2 \\ t = 2 \\ t = \frac{6}{3} = 2 \end{cases} \text{ compatibles}$$

Pour $B\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$: on a immédiatement $t = 0$

$\boxed{\text{Affirmation 2 : Fausse}}$

Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}$ possède une unique composante nulle alors que $\overrightarrow{OB}$ n'en possède aucune.

Donc $\forall k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OA} \neq k\,\overrightarrow{OB}$ i.e. $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires.

Puis soit $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$, on a :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} = 5\times(-1)+(-2)\times 0+1\times 5 = -5+0+5 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{OA}$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB} = 5\times 3+(-2)\times 2+1\times(-1) = 15-4-1 = 10 \neq 0$

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OB}$ qui est un vecteur directeur du plan (OAB), donc $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAB).

2) $\boxed{\text{Affirmation 3 : Fausse}}$

On remarque tout d'abord que les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$, dirigeant respectivement d et d', ne sont pas colinéaires.

En effet, soit $k \in \mathbb{R}$, $\vec{w} = 4\,\vec{v} \iff \begin{cases}4 = k\\4 = -k\\-6 = 2k\end{cases} \iff \begin{cases}k = 4\\k = -4\\k = -3\end{cases}$ incompatibles

Donc d et d' ne sont ni confondues ni strictement parallèles.

Elles sont ainsi soit sécantes (donc coplanaires), soit non coplanaires.

Etudions leur intersection :

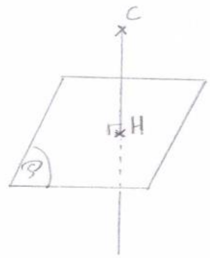
$$d \cap d' : \begin{cases}15+k = 1+4s\\8-k = 2+4s\\-6+2k = 1-6s\end{cases} \iff \begin{cases}23 = 3+8s & (L_1+L_2)\\k = 6-4s & (L_2)\\2k = 7-6s & (L_3)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}8s = 20\\k = 6-4s\\k = \frac{7}{2}-3s\end{cases}$$

D'où $d \cap d'$: $\begin{cases} s = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ k = 6 - 4s = 6 - 4 \times \frac{5}{2} = 6 - 10 = -4 \\ k = \frac{7}{2} - 3s = \frac{7}{2} - 3 \times \frac{5}{2} = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$ compatibles

Ainsi, $d \cap d' \neq \emptyset$ donc d et d' sont coplanaires

3) $\boxed{\text{Affirmation 4 : Vraie}}$



Notons H le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.

On a ainsi $\text{dist}(C ; \mathcal{P}) = HC$

On a $\mathcal{P}$: $x - y + z + 1 = 0$ donc $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$

Puis (HC) est dirigée par $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et passe par $C\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Donc (HC) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Puis $H \in (HC) \cap \mathcal{P}$, donc : $\begin{cases} x_H - y_H + z_H + 1 = 0 \\ x_H = 2 + t_H \\ y_H = -1 - t_H \\ z_H = 2 + t_H \end{cases}$

$\Rightarrow 2 + t_H - (-1 - t_H) + 2 + t_H + 1 = 0$

$\Rightarrow 5 + 2t_H + 1 + t_H = 0$

$\Rightarrow 3t_H = -6$

$\Rightarrow t_H = -2$

D'où H : $\begin{cases} x_H = 2 + t_H = 2 + (-2) = 0 \\ y_H = -1 - t_H = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \\ z_H = 2 + t_H = 0 \end{cases}$

Ainsi, $(HC) \cap \mathcal{P} = \left\{ H\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

Puis on a : $H\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

Enfin, $\text{dist}(C\,;\mathcal{P}) = HC$

$$= \|\overrightarrow{HC}\|$$
$$= \sqrt{\overrightarrow{HC}^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{4 + 4 + 4}$$
$$= \sqrt{12}$$
$$= \sqrt{4 \times 3}$$
$$= \sqrt{4} \times \sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3} \text{ u.l.}$$

Ex 4 :

⇒ Partie A :

1) On a : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0{,}02 . u_n^2 + 1{,}3 . u_n$

D'où $u_1 = -0{,}02 \times u_0^2 + 1{,}3 \times u_0 = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = -0{,}02 + 1{,}3 = 1{,}28$

D'après ce modèle, la posidonie devrait recouvrir $\boxed{1{,}28 \text{ ha}}$ au 01/07/25

2) a) Soit h définie sur $[0;20]$ par : $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$

On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$ sous réserve que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;20]$

On admet que h est croissante sur $[0;20]$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}28$

Donc $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 20$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$

et montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$

D'après HR : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$

par croissance de h sur $[0;20]$

$\Rightarrow h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20)$

$\Rightarrow h(1) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant h(20)$

Or $h(1) = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = u_1 = 1{,}28 \geqslant 1$

et $h(20) = -0{,}02 \times 20^2 + 1{,}3 \times 20 = 18 \leqslant 20$

Donc par transitivité : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$ ⇒ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20}$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \implies (u_n)$ est croissante

et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 20 \implies (u_n)$ est majorée (par 20)

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $L \leqslant 20$. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$, on a $L \in [1;20]$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$

h est continue sur $[0;20]$ en tant que fonction polynôme

Comme (u_n) converge vers un réel L,

d'après le théorème du point fixe, ce réel L est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
h(L) = L &\iff -0{,}02.L^2 + 1{,}3.L = L \\
&\iff -0{,}02.L^2 + 0{,}3.L = 0 \\
&\iff 2L^2 - 30L = 0 \quad \times(-100) \\
&\iff L^2 - 15L = 0 \\
&\iff L(L-15) = 0 \\
&\iff L = 0 \text{ ou } L - 15 = 0 \\
&\iff L = 0 \text{ ou } L = 15
\end{aligned}$$

⚠ On ne divise pas par L

Or d'après la question 2.b), on a $L \in [1;20]$

Donc $\boxed{L = 15}$

3) a) On sait que $u_0 = 1 < 14$, que (u_n) est croissante (cf 2.b) et que (u_n) converge vers $15 > 14$ (cf 2.c).

Donc $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n > 14}$

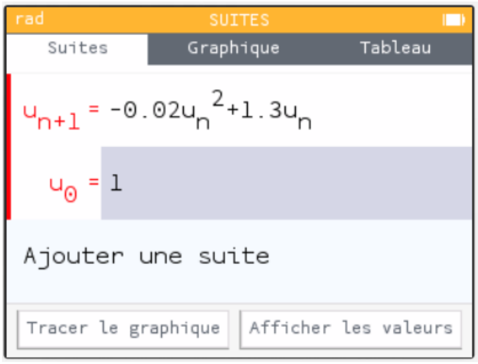
ⓑ
```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 14 :
        n = n+1
        u = -0,02 * u * u + 1,3 * u
    return n
```

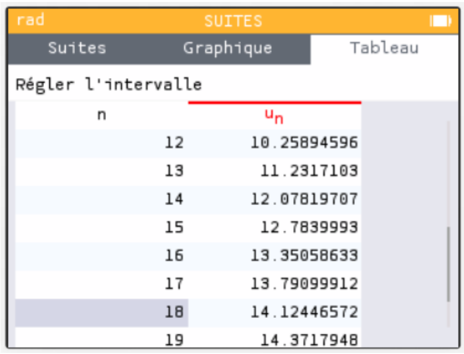
En lançant le script, on obtient :

```
def seuil():
    n=0
    u=1
    while u<=14:
        n=n+1
        u=-0.02*u*u+1.3*u
    return n
```

```
>>> seuil()
18
```

On peut ensuite vérifier avec l’onglet « suites » de la calculatrice :





$\Rightarrow$ Partie B :

1) On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$

or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \neq 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) \neq 0$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, par composition par la fonction inverse avec g non nulle sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = \dfrac{-g'(t)}{(g(t))^2}$

Puis f est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = 0{,}02 \times f(t) \times (15 - f(t))$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{-g'(t)}{(g(t))^2} = 0{,}02 \times \dfrac{1}{g(t)} \times \left(15 - \dfrac{1}{g(t)}\right)$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $-g'(t) = 0{,}02 \times \dfrac{(g(t))^2}{g(t)} \times \left(15 - \dfrac{1}{g(t)}\right)$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $-g'(t) = 0{,}02 \times g(t) \times \left(15 - \dfrac{1}{g(t)}\right)$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $-g'(t) = 0{,}02 \times 15 \times g(t) - 0{,}02 \times \cancel{g(t)} \times \dfrac{1}{\cancel{g(t)}}$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $-g'(t) = 0{,}3 \times g(t) - 0{,}02$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = -0{,}3 \times g(t) + 0{,}02$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{g \text{ est solution de } (E_2)}$ sur $\mathbb{R}_+$

Soit (E_2) : $y' = -0{,}3\,y + 0{,}02$ ⚠ On résout sur $\mathbb{R}$ ici, pas sur $\mathbb{R}_+$

Tout d'abord, la fonction constante : $t \longmapsto \dfrac{-0{,}02}{-0{,}3}$ i.e. $t \longmapsto \dfrac{1}{15}$ est solution particulière de (E_2) sur $\mathbb{R}$

Puis étudions l'équation différentielle homogène (E_H) : $y' = -0{,}3\,y$ associée à (E_2)

les fonctions $t \longmapsto \lambda . e^{-0{,}3t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$

les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda . e^{-0{,}3t} + \frac{1}{15} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

3) D'après la question 1) de la partie B, on a :

g solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \lambda . e^{-0{,}3t} + \dfrac{1}{15}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Puis $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$

$$= \frac{1}{\lambda . e^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1 \times 15}{15\left(\lambda . e^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}\right)} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{15}{15\lambda . e^{-0{,}3t} + 1} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 15\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \quad f(t) = \frac{15}{K.e^{-0,3t}+1} \quad , K \in \mathbb{R}$$

Or on veut $f(0) = 1 \iff \dfrac{15}{K \times e^{-0,3\times 0}+1} = 1$

$$\iff \frac{15}{K\times 1+1} = 1$$

$$\iff 15 = K+1 \quad \text{et } K \neq -1$$

$$\iff K = 14$$

D'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ , \quad f(t) = \dfrac{15}{14.e^{-0,3t}+1}}$

4) On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,3t = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Donc par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,3t} = 0$

Puis par opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{15}{14\times 0+1} = \boxed{15}$$

5) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on veut : $f(t) > 14$

$$\iff \frac{15}{14.e^{-0,3t}+1} > 14$$

car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $14.e^{-0,3t}+1 > 0$

$$\iff 15 > 14\left(14.e^{-0,3t}+1\right)$$

Puis $f(t) > 14 \iff 15 > 14^2 . e^{-0,3t} + 14$

$\iff 14^2 . e^{-0,3t} < 1$

$\iff e^{-0,3t} < 14^{-2}$

$\iff -0,3t < \ln\left(14^{-2}\right)$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff -0,3t < -2 \times \ln 14$

$\iff t > \dfrac{2 \times \ln 14}{0,3}$ car $-0,3 < 0$

$\iff t > \dfrac{20 . \ln 14}{3}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{20 \times \ln 14}{3} \ ; +\infty\right[}$$

Interprétation : D'après ce modèle continu, la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares à partir d'une durée de $t = \dfrac{20 \times \ln 14}{3}$ années (arrondi à l'excès en jours) écoulée à partir du 01/07/2024.

Remarque : $t = \dfrac{20 \times \ln 14}{3}$ années $\approx$ 17 années et 217 jours, arrondi à l'excès en jours en prenant 1 an = 365 jours.

Il faudra donc attendre le début de l'année 2042, i.e. le 01/07/2024 + 17 ans + 7 mois + 7 jours (environ)