Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2025

Centres étrangers – Sujet 2

13 juin 2025

Ex1 :

=> Partie A :

1) (u_n) est géométrique de raison $q = 0,93$

On a $u_0 = 6$

D'où $u_1 = 0,93 \times u_0 = 0,93 \times 6 = 5,58$

Selon ce modèle, il y aura $\boxed{\text{5580 individus}}$ au 1er janvier 2026.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \cdot q^n = \boxed{6 \times 0,93^n}$

3) On a : $|q| < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,93^n = 0$

Puis par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6 \times 0 = \boxed{0}$

Interprétation : A très long terme, il n'y aura plus aucun individu dans le milieu A.

=> Partie B :

1) Soit (v_n) : $v_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = -0,05 . v_n^2 + 1,1 . v_n$

On a : $v_1 = -0,05 \times v_0^2 + 1,1 \times v_0$

$= -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6$

$= 4,8$

Selon ce modèle, il y aura $\boxed{\text{4 800 individus}}$ au 1er janvier 2026.

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = -0{,}05\,x^2 + 1{,}1\,x$

Etudions cette fonction polynôme du second degré sur $\mathbb{R}$ dans un 1er temps :

f est concave car son coefficient dominant $a = -0{,}05$ est négatif.

Puis l'abscisse du sommet (maximum ici) de la parabole vaut :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}1}{2\times(-0{,}05)} = \frac{-1{,}1}{-0{,}1} = \frac{11}{1} = 11$$

D'où sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0		11		$+\infty$
$-0{,}05x^2+1{,}1x$			↗		↘	

Puis sur $\mathbb{R}_+$, l'ensemble de définition de f :

x	0		11		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘	

On a donc bien : $\boxed{f \text{ est croissante (strictement) sur } [0\,;11]}$

Rem : On pouvait également choisir de dériver f sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynôme du second degré :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -0{,}05 \times 2x + 1{,}1 = -0{,}1x + 1{,}1$

Puis soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$f'(x) \geqslant 0 \iff -0{,}1x + 1{,}1 \geqslant 0 \iff 0{,}1x \leqslant 1{,}1 \iff x \leqslant 11$

Donc f est croissante sur $[0\,;11]$

3) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 6$ et $v_1 = 4{,}8$ (cf question B.1)

On a bien : $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$

montrons que $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$

On a HR : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$

$\Rightarrow f(2) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f(6)$ par croissance de f sur $[0\,;11]$

$\Rightarrow f(2) \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant f(6)$

Or $f(2) = -0{,}05 \times 2^2 + 1{,}1 \times 2 = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$

et $f(6) = -0{,}05 \times 6^2 + 1{,}1 \times 6 = 4{,}8 \leqslant 6$

On a ainsi $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 4{,}8 \leqslant 6$

$\Rightarrow 2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$ Par transitivité

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6}$

4) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant v_n \Rightarrow (v_n)$ est décroissante

et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant 2 \Rightarrow (v_n)$ est minorée par 2

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [2\,;6]$ (car $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant v_n \leqslant 6$)

5) a) En tant que fonction polynôme, f est continue sur $\mathbb{R}_+$

De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = f(v_n)$

Comme (v_n) converge vers une limite réelle $\ell \in [2;6]$,

d'après le théorème du point fixe, on sait que ℓ vérifie :

$$f(\ell) = \ell \iff -0{,}05\,\ell^2 + 1{,}1\,\ell = \ell$$

$$\iff -0{,}05\,\ell^2 + 0{,}1\,\ell = 0$$

$$\iff -5\,\ell^2 + 10\,\ell = 0$$

$$\iff \ell^2 - 2\,\ell = 0$$

$$\iff \ell(\ell - 2) = 0$$

$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2$$

Or $\ell \in [2;6]$, donc $\boxed{\ell = 2}$

b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$

Donc à très long terme, il restera 2000 individus dans le milieu B.

=> Partie C :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut :

$$u_n < 3 \iff 6 \times 0{,}93^n < 3 \iff 0{,}93^n < \frac{1}{2} \xLeftrightarrow{\text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*} \ln(0{,}93^n) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff n \cdot \ln(0{,}93) < -\ln 2 \iff n > \frac{-\ln 2}{\ln 0{,}93} \quad \text{car } \ln 0{,}93 < 0$$

or $\frac{-\ln 2}{\ln 0{,}93} \approx 9{,}55$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc $n \geqslant 10$

Il y aura donc strictement moins de 3000 individus dans le milieu A

à partir de l'année 2025 + 10 = $\boxed{2035}$

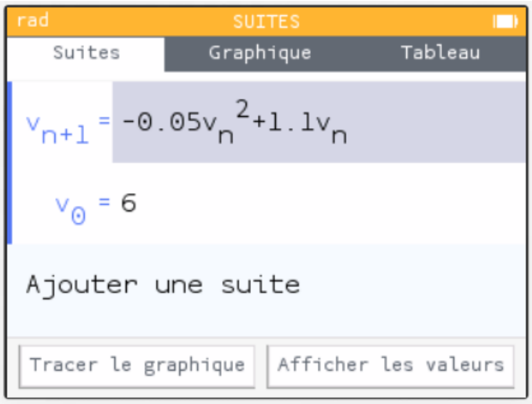
Rem : $u_0 > 0$ et $q \in]0;1[$ donc (u_n) est strictement décroissante.

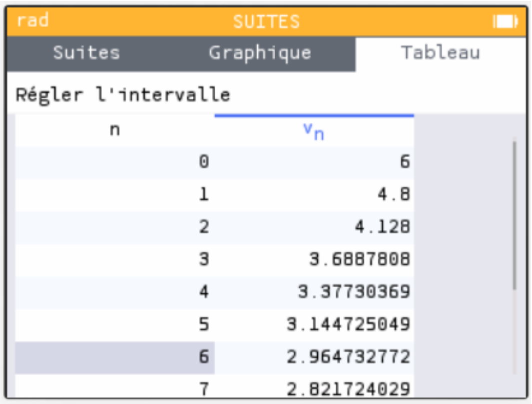
2) (v_n) est décroissante.

On a $v_5 \approx 3,14 > 3$ et $v_6 \approx 2,96 < 3$

Il y aura donc strictement moins de 3000 individus dans le milieu B

à partir de l'année 2025 + 6 = 2031





3) On a $u_0 = v_0 = 6$

(u_n) et (v_n) sont décroissantes

De plus, (u_n) converge vers 0 et (v_n) converge vers $2 > 0$

Donc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ v_n > u_n$

En choisissant pour n_0 la plus petite valeur à partir de laquelle l'inégalité précédente est vérifiée, on peut dire que la population du milieu B dépassera la population du milieu A à partir de l'année $\boxed{2025 + n_0}$

5)

a) On peut utiliser le script suivant :

```
n=0
u=6
v=6
while v<=u:
    u=0.93*u
    v=-0.05*v*v+1.1*v
    n=n+1
print(2025+n)
```

b) Dans la console, on obtient :

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
2038
```

Ainsi, la population du milieu B dépassera la population du milieu A à partir de l'année $\boxed{2038}$

Ex 2 :

⟹ Partie A :

1) Avec la précision permise par le graphique, $\boxed{f(10) \simeq 0,88}$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{1}{a + e^{-bx}}$ avec $(a ; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

On a $\lim_{x \to +\infty} -bx = -\infty$ car $b > 0$

Puis comme $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$, on a par composition : $\lim_{x \to +\infty} e^{-bx} = 0$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{a + 0} = \dfrac{1}{a}$

Or on sait que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \iff \dfrac{1}{a} = 1 \iff \boxed{a = 1}$

4) Soit m le coefficient directeur de (AB).

On a : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1 - 0,5}{10 - 0} = \dfrac{0,5}{10} = \boxed{0,05}$

5) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-bx}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{-(0 + (-b) \times e^{-bx})}{(1 + e^{-bx})^2}$

$= \boxed{\dfrac{b . e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}}$

ⓑ (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A, avec $x_A = 0$

D'où $f'(x_A) = m \iff f'(0) = 0{,}05$

$$\iff \frac{b.e^{-b\times 0}}{\left(1+e^{-b\times 0}\right)^2} = 0{,}05$$

$$\iff \frac{b\times 1}{(1+1)^2} = 0{,}05$$

$$\iff \frac{b}{4} = 0{,}05$$

$$\iff \boxed{b = 0{,}2}$$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$

1) Cette question est un peu inattendue car on nous demande d'admettre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ dans la question 2) de la partie A.

Redémontrons ce résultat qui nous avait permis d'obtenir $a = 1$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}2x = -\infty$

Puis par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}2x} = 0$

Par opérations sur les limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{1+0} = \boxed{1}$

2) D'après la question 5.a) de la partie A, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{b.e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$$

car $b = 0{,}2$

$$= \frac{e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-0,2x} > 0$ et $(1+e^{-0,2x})^2 > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) > 0$

D'où $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

3) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

On a $f(0) = \dfrac{1}{1+e^{-0,2\times 0}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Ainsi, $0,97 \in \left[f(0) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= f(\mathbb{R}_+)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}_+ ,\ f(\alpha) = 0,97}$

4) Par balayage avec la calculatrice, on a :

$f(10) < 0,97$ et $f(20) > 0,97$ donc $\alpha \in]10 ; 20[$

puis $f(17) < 0,97$ et $f(18) > 0,97$ donc $\boxed{\alpha \in]17 ; 18[}$

=> Partie C :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}} = \dfrac{1 \times e^{0,2x}}{(1+e^{-0,2x}) . e^{0,2x}} = \dfrac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + e^{0}}$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ ,\ f(x) = \dfrac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}}$

2) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}} = \frac{5 \times 0,2 \times e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}} = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

avec $u : x \longmapsto 1+e^{0,2x}$ dérivable et <u>strictement positive</u> sur $\mathbb{R}_+$

On en déduit donc <u>une</u> primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad F(x) = 5 \times \ln(u(x)) = \boxed{5 \ln\left(1+e^{0,2x}\right)}$$

3) $$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1+e^{-0,2x}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{40} \int_0^{40} f(x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{40} \left[F(x)\right]_0^{40}$$

$$= \frac{1}{40} \left[5 \ln\left(1+e^{0,2x}\right)\right]_0^{40}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\ln\left(1+e^{0,2 \times 40}\right) - \ln\left(1+e^{0,2 \times 0}\right)\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{8}\left(\ln\left(1+e^{8}\right) - \ln 2\right)}$$

$$\boxed{\simeq 0,913} \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près})$$

Ex 3 :

⟹ Partie A :

1) L'ordre est important et la répétition est autorisée, donc il s'agit de déterminer le nombre de 4-uplets d'un ensemble de 64 éléments.

Il y a ainsi $\boxed{64^4 = 16\,777\,216 \text{ séquences possibles}}$

2) Désormais, l'ordre est important mais la répétition n'est plus autorisée. Il s'agit donc d'un arrangement de 4 éléments parmi 64.

Il y a ainsi $A_{64}^4 = \dfrac{64!}{(64-4)!} = \dfrac{64 \times 63 \times 62 \times 61 \times \cancel{60!}}{\cancel{60!}} = \boxed{15\,249\,024}$ séquences possibles.

Rem : On pouvait aussi considérer qu'il y a 64 possibilités pour le premier élément, 63 pour le 2ème, 62 pour le 3ème et 61 pour le 4ème. Puis par principe multiplicatif, il y a $64 \times 63 \times 62 \times 61$ possibilités.

3) a) La répétition est de nouveau autorisée et l'ordre est toujours important. Comme il n'y a plus que 63 éléments, il y a désormais $\boxed{63^4 = 15\,752\,961}$ séquences possibles.

b) Par passage au complémentaire ("au moins un" est le contraire de "aucun"), il y a $\boxed{64^4 - 63^4 = 1\,024\,255}$ séquences comportant au moins un A majuscule.

c) Déterminons dans un premier temps le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule et qu'elle soit placée en tant que premier caractère de la séquence :

Le premier caractère est fixé (la lettre A majuscule). Il y a donc une seule possibilité pour le premier caractère.

Chacun des trois autres caractères possède 63 possibilités (toutes les lettres sauf A majuscule).

Par principe multiplicatif, il y a donc $1 \times 63 \times 63 \times 63 = 63^3$ séquences possibles avec une seule fois la lettre A majuscule et en premier caractère.

Il est clair que le calcul reste identique pour la lettre A placée en tant que deuxième, troisième ou quatrième caractère.

Ainsi, par principe additif, il y a $\boxed{4 \times 63^3 = 1\,000\,188}$ séquences possibles comportant exactement une fois la lettre A majuscule.

d) Soyons plus concis dans la rédaction de cette réponse. Dans la question précédente, il y avait $\binom{4}{1} = 4$ façons de placer la lettre A.

Désormais, il y a $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{\cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2}} = 6$ possibilités pour A.

On peut les représenter : AA**, A*A*, A**A, *AA*, *A*A, **AA

Pour les deux caractères restants, il y a $63 \times 63 = 63^2$ possibilités.

Donc par principe multiplicatif, il y a $\boxed{6 \times 63^2 = 23\,814}$ séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

⇒ Partie B :

1) On répète $\boxed{n = 250}$ fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est $\boxed{p = 0{,}01}$.

Donc $\boxed{X \sim \mathcal{B}(250\,;\,0{,}01)}$.

2) X compte les caractères mal transmis

Donc on veut ici : $P(X=0) = \binom{250}{0} \times 0{,}01^{0} \times (1-0{,}01)^{250-0}$

$= 1 \times 1 \times 0{,}99^{250}$

$\boxed{= 0{,}99^{250}}$

$\boxed{\approx 0{,}081}$ à 10^{-3} près

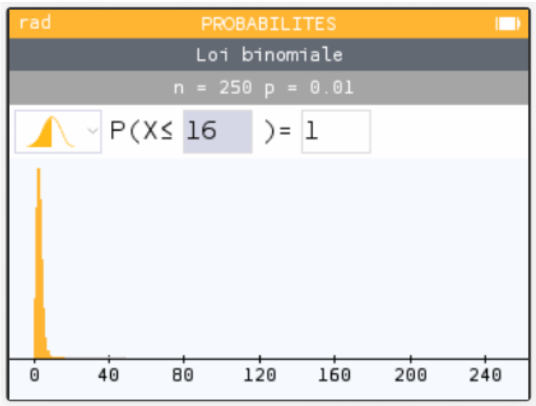
3) $P(X > 16) = 1 - P(X \leqslant 16)$

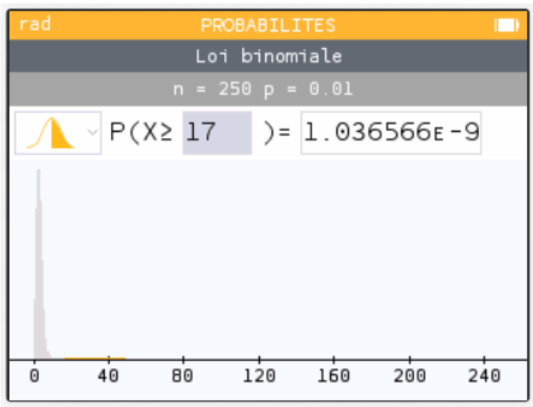
i.e. $P(X \geqslant 17) \approx 1{,}04 \times 10^{-9}$

Donc $\boxed{\text{l'affirmation est correcte}}$ car la probabilité est d'environ 1 pour 1 000 000 000.

⚠ La calculatrice ne donne pas une meilleure approximation que 1 pour $P(X \leqslant 16)$

Il faut donc utiliser la commande $P(X \geqslant 17)$ sur la calculatrice pour éviter d'avoir une probabilité nulle comme résultat.





⇒ Partie C :

On pose $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \sum_{k=1}^{4} X_k$

Tout d'abord, comme $X_1 \sim \mathcal{B}(250\,;\,0{,}01)$, on a :

$E(X_1) = n \times p = 250 \times 0{,}01 = 2{,}5$

$V(X_1) = n \times p \times (1-p) = 250 \times 0{,}01 \times (1-0{,}01) = 2{,}5 \times 0{,}99 = 2{,}475$

Toutes les variables aléatoires X_k, $k \in [\![1\,;4]\!]$, sont identiquement distribuées, donc $X_1 = X_2 = X_3 = X_4$

Puis $\forall\, k \in [\![2\,;4]\!]$, $\begin{cases} E(X_k) = E(X_1) = 2{,}5 \\ V(X_k) = V(X_1) = 2{,}475 \end{cases}$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{4} X_k\right) = \sum_{k=1}^{4} E(X_k) = 4 \times E(X_1) = 4 \times 2{,}5 = 10$$

Puis comme les variables aléatoires sont <u>indépendantes</u>, on a :

$$V(S) = V\left(\sum_{k=1}^{4} X_k\right) = \sum_{k=1}^{4} V(X_k) = 4 \times V(X_1) = 4 \times 2{,}475 = 9{,}9$$

D'où $\boxed{E(S) = 10}$ et $\boxed{V(S) = 9{,}9}$

Rem : On pouvait éviter le signe Σ en écrivant :

$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \times E(X_1) = \ldots$

et de même pour la variance.

Ex 4 :

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$

Soit $k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}-3 = -k\\ 1 = 3k\\ -1 = -k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = 3\\ k = \frac{1}{3}\\ k = 1\end{cases}$ incompatibles

Donc $\forall k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc $\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés}}$ et forment le plan (ABC).

ⓑ Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\times(-3) + 1\times 1 + 4\times(-1) = 3+1-4 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -1\times(-1) + 1\times 3 + 4\times(-1) = 1+3-4 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires qui dirigent le plan (ABC). Donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (ABC).}}$

ⓒ $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme $-1\times x + 1\times y + 4\times z + d = 0$

$\Leftrightarrow -x + y + 4z + d = 0$

Puis $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \in (ABC) \Leftrightarrow -x_A + y_A + 4z_A + d = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 0 + 4\times 3 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -11$

D'où (ABC) : $\boxed{-x + y + 4z - 11 = 0}$

2) ⓐ D'après les équations cartésiennes proposées, on a :

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}'$

le vecteur $\vec{n_2}$ possède trois composantes qui ont la même valeur absolue, et ce n'est pas le cas pour le vecteur $\vec{n_1}$. Donc $\forall k \in \mathbb{R}$, $\vec{n_1} \neq k.\vec{n_2}$

les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{\text{les plans } \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}' \text{ sont sécants.}}$

On note $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (d)$

ⓑ Dans le R.O.N., on a :

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 3 \times 1 + (-3) \times (-1) + 2 \times (-1) = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$

les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas orthogonaux.

Donc $\boxed{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}' \text{ ne sont pas perpendiculaires.}}$

3) On a $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n_1} = 1 \times 3 + 1 \times (-3) + 0 \times 2 = 3 - 3 + 0 = 0 & \text{donc } \vec{u} \perp \vec{n_1} \\ \vec{u} \cdot \vec{n_2} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times (-1) = 1 - 1 + 0 = 0 & \text{donc } \vec{u} \perp \vec{n_2} \end{cases}$$

Ainsi, il existe une droite $(d_1) \subset \mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{u}$, et une droite $(d_2) \subset \mathcal{P}'$ également de vecteur directeur $\vec{u}$.

On a ainsi $(d_1) \parallel (d_2)$, et comme $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (d)$, d'après le théorème du toit, $(d) \parallel (d_1)$ et $(d) \parallel (d_2)$.

Donc $\boxed{(d) \text{ est dirigée par } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$, vecteur directeur de (d_1) et (d_2).

Rem : On pouvait également trouver directement une représentation paramétrique de (d) à partir des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en posant pour paramètre $x = t$ ou $y = t$. On pouvait ensuite extraire un vecteur directeur de (d) et le comparer à $\vec{u}$.

Toutefois, cette méthode alternative ne va pas dans le sens de l'exercice car la question 4) propose de façon guidée de déterminer une représentation paramétrique de (d).

4) On a :

$3x_M - 3y_M + 2z_M - 9 = 3\times 2 - 3\times 1 + 2\times 3 - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0$ donc $\boxed{M \in \mathcal{P}}$

et $x_M - y_M - z_M + 2 = 2 - 1 - 3 + 2 = 0$ donc $\boxed{M \in \mathcal{P}'}$

Ainsi $M\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, i.e. $M\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \in (d)$

comme $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), on obtient :

$$\boxed{(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

5) Soit $t \in \mathbb{R}$ et N un point quelconque de (d) de paramètre t.

On a : $-x_N + y_N + 4z_N - 11 = -(2+t) + (1+t) + 4\times 3 - 11 = -2 \cancel{-t} + 1 \cancel{+t} + 12 - 11 = 0$

Donc $N \in (d) \Rightarrow N \in (ABC)$ pour tout point N de (d)

Ainsi, $\boxed{(d) \subset (ABC)}$

Nous savons que $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ car $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (d)$

Vérifions si (ABC) est également distinct de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.

$3x_C - 3y_C + 2z_C - 9 = 3\times 0 - 3\times 3 + 2\times 2 - 9 = 0 - 9 + 4 - 9 = -14 \neq 0$

donc $C \notin \mathcal{P}$ et $C \in (ABC)$, d'où $(ABC) \neq \mathcal{P}$

Puis $x_C - y_C - z_C + 2 = 0 - 3 - 2 + 2 = -3 \neq 0$

donc $C \notin \mathcal{P}'$ et $C \in (ABC)$, d'où $(ABC) \neq \mathcal{P}'$

Ainsi, les plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont distincts.

De plus, comme $(d) \subset (ABC)$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (d)$, on en conclut que : $\boxed{\text{les plans } (ABC),\ \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}' \text{ sont sécants d'intersection } (d).}$

⚠ On ne doit pas parler de plans concourants car "concourant" signifie "qui tend vers un même point".