

Mathsapiens.fr

M

Baccalauréat général

Session 2025

Asie – Sujet 2

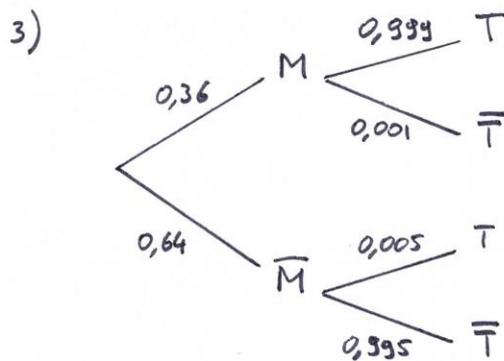
12 juin 2025

Ex 1:

⇒ Partie A:

1) D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0,999$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,005$

2) $P(M) = \frac{\text{Card}(M)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{270\,000}{750\,000} = \frac{27}{75} = \frac{9}{25} = 0,36$



4) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 = 0,35964$
 $\approx 0,360$ à 10^{-3} près

5) $\{M; \bar{M}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\
 &= 0,35964 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \\
 &= 0,35964 + 0,64 \times 0,005 \\
 &= 0,35964 + 0,0032 \\
 &= 0,36284
 \end{aligned}$$

$$\approx 0,363 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

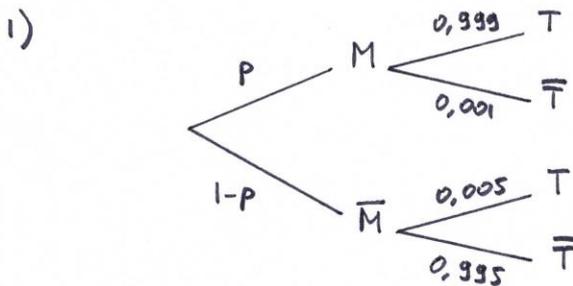
$$6) P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,35964}{0,36284} \approx 0,991 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

Rem : en utilisant des valeurs approchées dans les calculs intermédiaires, on obtient $0,992$ à 10^{-3} près

$$7) P_T(M) \approx 0,991 > 0,95$$

Donc d'après l'énoncé, le test est fiable.

⇒ Partie B :



2) On utilise de nouveau la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \\ &= p \times 0,999 + (1-p) \times 0,005 \\ &= p \times (0,999 - 0,005) + 0,005 \\ &= \boxed{0,994 p + 0,005} \end{aligned}$$

$$3) P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,999 p}{0,994 p + 0,005} = \frac{1000 \times 0,999 p}{1000(0,994 p + 0,005)} = \boxed{\frac{999 p}{994 p + 5}}$$

$$4) \text{ Le test est fiable } \Leftrightarrow P_T(M) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \frac{999p}{999p+5} > 0,95$$

car $p \in [0;1]$
donc $999p+5 > 0$

$$\Leftrightarrow 999p > 0,95(999p+5)$$

$$\Leftrightarrow 999p > 944,3p + 4,75$$

$$\Leftrightarrow 54,7p > 4,75$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{4,75}{54,7}$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{95}{1094}$$

$$\text{on } \frac{95}{1094} \approx 0,0868$$

$$\text{Donc le test est fiable ssi } p \in \left] \frac{95}{1094} ; 1 \right]$$

$$\text{ssi } p \in \left] 0,087 ; 1 \right] \text{ avec l'arrondi à } 10^{-3} \text{ près}$$

Partie C :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X \sim \mathcal{B}(n; 0,36)$

$$\text{On veut } P(X \geq 1) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) < 0,01$$

$$\begin{aligned}
 \text{On } P(X=0) &= \binom{m}{0} \times 0,36^0 \times (1-0,36)^{m-0} \\
 &= 1 \times 1 \times 0,64^m \\
 &= 0,64^m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } P(X=0) < 0,01 &\Leftrightarrow 0,64^m < 0,01 \\
 &\Leftrightarrow \ln(0,64^m) < \ln 0,01 && \left. \begin{array}{l} \text{par stricte croissance} \\ \text{de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \end{array} \right\} \\
 &\Leftrightarrow m \cdot \ln 0,64 < \ln 0,01 \\
 &\Leftrightarrow m > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,64} && \left. \right\} \text{ car } \ln 0,64 < 0
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{\ln 0,01}{\ln 0,64} \approx 10,3 \quad \text{et on veut } m \in \mathbb{N}^*$$

Donc il faut au moins $m = 11$ individus dans l'échantillon.

Ex 2:

\Rightarrow Partie A: Soient (u_n) : $u_0 = 30$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 10$
 et (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 20$

$$1) u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = \boxed{25}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12,5 + 10 = \boxed{22,5}$$

$$\begin{aligned} 2) \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 20 \\ &= \frac{1}{2} u_n + 10 - 20 \\ &= \frac{1}{2} u_n - 10 \\ &= \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} \times 20 \\ &= \frac{1}{2} (u_n - 20) \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$$3) \text{ On a de plus } v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$4) \text{ On a } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 20$$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 20$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

5) On a : $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Puis par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20 + 10 \times 0 = \boxed{20}$$

\Rightarrow Partie B : Soit (w_n) : $w_0 = 45$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{2} u_n + 7$

1) $w_1 = w_{0+1} = \frac{1}{2} w_0 + \frac{1}{2} u_0 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + \frac{1}{2} \times 30 + 7$

$\Leftrightarrow w_1 = 22,5 + 15 + 7 = 22,5 + 22 = \boxed{44,5}$

2) le programme renvoie une mauvaise valeur car dans le calcul de w_{n+1} , on a besoin de u_n et non de u_{n+1} .

Il suffit ainsi d'intervenir les lignes 5 et 6 du script pour qu'il fonctionne correctement.

```
def suite(n):
    U=30
    W=45
    for i in range (1,n+1):
        W=W/2+U/2+7
        U=U/2+10
    return W
```

```
>>> suite(0)
45
>>> suite(1)
44.5
>>> suite(2)
41.75
```

3) a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$

Initialisation: Pour $n=0$, on a:

$$10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 0 + 11 + 34 = 45 = w_0$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$

et montrons que $w_{n+1} = 10(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

on a: $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{2} u_n + 7$

$$= \frac{1}{2} \left(10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \right) + \frac{1}{2} u_n + 7 \quad \text{) (HR)}$$

$$= 10n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + \frac{1}{2} (20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n) + 7$$

$$= 10n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 24 + 10 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 10(n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion: $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

b) On a: $\forall n \in \mathbb{N} \cap [4; +\infty[$, $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$

On $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Puis nous avons déjà montré précédemment que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc par opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 = 0 + 0 + 34 = 34$$

Donc (w_n) converge vers 34

Ex 3:

Affirmation 1: Vraie

D'après l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} , on a $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ normal à \mathcal{P} .

D'après la représentation paramétrique de (d) , on a $\vec{u} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ directeur de (d) .

On remarque que $\vec{n} = 6\vec{u}$, donc \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires.

Ainsi (d) est orthogonale à \mathcal{P} .

Vérifions si $H \in \mathcal{P}$ et $H \in (d)$, avec $H \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$2x_H + 3y_H + 6z_H - 6 = 2 \times (-6) + 3 \times 2 + 6 \times 2 - 6 = -12 + 6 + 12 - 6 = 0$$

$$\text{donc } H \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

$$\begin{cases} x_H = -8 + \frac{1}{3}t_H \\ y_H = -1 + \frac{1}{2}t_H \\ z_H = -4 + t_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -8 + \frac{1}{3}t_H \\ 2 = -1 + \frac{1}{2}t_H \\ 2 = -4 + t_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}t_H = 2 \\ \frac{1}{2}t_H = 3 \\ t_H = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_H = 6 \\ t_H = 6 \\ t_H = 6 \end{cases} \leftarrow \text{compatibles}$$

$$\text{donc } H \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in (d)$$

On a donc bien $(d) \perp \mathcal{P}$ et $(d) \cap \mathcal{P} = \{H\}$

Affirmation 2: Fausse

Dans le R.O.N., on a $C \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH} = -3 \times (-9) + 2 \times 2 + 0 \times 2 = 27 + 4 + 0 = 31$$

Par ailleurs, on a :

$$CD = \|\vec{CD}\| = \sqrt{\vec{CD}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{9+4+0} = \sqrt{13}$$

$$\text{et } CH = \|\vec{CH}\| = \sqrt{\vec{CH}^2} = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{81+4+4} = \sqrt{89}$$

$$\text{Enfin, } \vec{CD} \cdot \vec{CH} = CD \times CH \times \cos \widehat{DCH}$$

$$\text{D'où } \cos \widehat{DCH} = \frac{\vec{CD} \cdot \vec{CH}}{CD \times CH} = \frac{31}{\sqrt{13} \times \sqrt{89}} = \frac{31}{\sqrt{1157}}$$

$$\text{Puis } \widehat{DCH} = \cos^{-1} \frac{31}{\sqrt{1157}} \approx 24,3^\circ \text{ (à } 10^{-1} \text{ près)}$$

Affirmation 3: Vraie

D'après les équations cartésiennes, $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P} et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P}' .

Toutes les composantes de \vec{n} sont positives alors que \vec{n}' possède deux composantes positives et une composante négative.

Donc $\forall k \in \mathbb{R}, \vec{n} \neq k \vec{n}'$, i.e. \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires.

Ainsi, \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants selon une droite.

Vérfions s'il s'agit de Δ :

$$\begin{cases} 2(3-3t) + 3 \times 0 + 6 \times t - 6 = 6 - 6t + 6t - 6 = 0 & \text{donc } \Delta \subset \mathcal{P} \\ 3-3t - 2 \times 0 + 3 \times t - 3 = 3 - 3t + 3t - 3 = 0 & \text{donc } \Delta \subset \mathcal{P}' \end{cases}$$

On a donc bien $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$

Remarque: On pouvait également retrouver la représentation paramétrique proposée pour Δ à partir des équations cartésiennes de \mathcal{P} et \mathcal{P}' , en posant $z = t$:

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' : \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ x - 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 6t - 6 = 0 \\ x - 2y + 3t - 3 = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 0 & (L_1 - 2L_2) \\ 7x + 21t - 21 = 0 & (2L_1 + 3L_2) \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 7x = 21 - 21t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 - 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Affirmation 4: Vraie

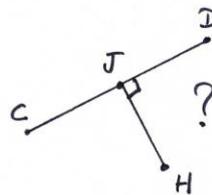
Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $H \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $J \begin{pmatrix} -54/13 \\ 62/13 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HJ} \begin{pmatrix} 24/13 \\ 36/13 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HJ} = -3 \times \frac{24}{13} + 2 \times \frac{36}{13} + 0 \times (-2) = \frac{-72}{13} + \frac{72}{13} = 0$$

Donc $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{HJ}$, et ainsi (CD) et (HJ) sont orthogonales.

Vérifions si elles sont sécantes en J.

De toute évidence, $J \in (HJ)$.



$$\text{Puis } (CD) : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_J = 3 - 3t_J \\ y_J = 2t_J \\ z_J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{54}{13} = 3 - 3t_J \\ \frac{62}{13} = 2t_J \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t_J = \frac{93}{13} \\ t_J = \frac{31}{13} \end{cases} \Leftrightarrow t_J = \frac{31}{13}$$

Ainsi $J \in (CD)$

Finalement, on a : $\begin{cases} \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{HJ} \\ (CD) \cap (HJ) = J \end{cases} \Rightarrow J \text{ est le projeté orthogonal de } H \text{ sur } (CD)$

Remarque : pour vérifier que $J \in (CD)$, on aurait pu aussi s'assurer que \overrightarrow{CJ} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

Ex 4: \Rightarrow Partie A:

1) Avec la précision que permet le graphique proposé, on peut estimer que la température redescend à sa valeur initiale $T = 40^\circ\text{C}$ au bout d'environ $t \approx 3 \text{ minutes et } 45 \text{ secondes}$, i.e. $t = 3,75 \text{ min}$

2) $\forall t \in [0; 10]$, $f(t) = (at + b) \cdot e^{-0,5t}$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer

$$\text{on a } f(0) = 40 \Leftrightarrow (a \times 0 + b) \cdot e^{-0,5 \times 0} = 40$$

$$\Leftrightarrow b \times 1 = 40$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b = 40}$$

3) On admet que f est dérivable sur $[0; 10]$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall t \in [0; 10], f'(t) &= a \cdot e^{-0,5t} + (at + 40) \times (-0,5) \times e^{-0,5t} \\ &= \left(-\frac{a}{2}t + a - 20\right) e^{-0,5t} \end{aligned}$$

Par ailleurs, f est solution de (E): $y' + 0,5y = 60 \cdot e^{-0,5t}$

$$\text{D'où } (-0,5at + a - 20) e^{-0,5t} + 0,5(at + 40) \cdot e^{-0,5t} = 60 \cdot e^{-0,5t}$$

$$\Leftrightarrow (\cancel{-0,5a \cdot t} + a - 20 + \cancel{0,5a \cdot t} + 20) \cdot e^{-0,5t} = 60 \cdot e^{-0,5t}$$

$$\Leftrightarrow a \times e^{-0,5t} = 60 \times e^{-0,5t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = 60}$$

\hookrightarrow car $\forall t \in [0; 10]$,
 $e^{-0,5t} \neq 0$

$$\text{D'où } \forall t \in [0; 10], f(t) = (60t + 40) \cdot e^{-0,5t}$$

⇒ Partie B :

1) D'après la question 3) de la partie A, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; 10], f'(t) &= \left(-\frac{a}{2}t + a - 20\right) \cdot e^{-0,5t} \\ &= \left(-\frac{60}{2}t + 60 - 20\right) \cdot e^{-0,5t} \quad \left. \vphantom{f'(t)} \right\} a=60 \\ &= \boxed{(40 - 30t) \cdot e^{-0,5t}} \end{aligned}$$

2) $\forall t \in [0; 10], e^{-0,5t} > 0$

Donc $f'(t)$ est du signe de $40 - 30t$ sur $[0; 10]$

Soit $t \in [0; 10], f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 40 - 30t \geq 0$

$$\Leftrightarrow 30t \leq 40$$

$$\Leftrightarrow t \leq \frac{4}{3}$$

t	0	$\frac{4}{3}$	10
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	40	$120e^{-\frac{2}{3}}$	$640 \cdot e^{-5}$

D'après l'énoncé, on a $f(0) = 40$

Puis $f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(60 \times \frac{4}{3} + 40\right) \cdot e^{-0,5 \times \frac{4}{3}} = 120 \cdot e^{-\frac{2}{3}}$

et $f(10) = (60 \times 10 + 40) \cdot e^{-0,5 \times 10} = 640 \cdot e^{-5}$

⑥ Procédons par disjonction de cas :

* f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0; \frac{4}{3}]$

On a $f(0) = 40$ donc $\forall t \in]0; \frac{4}{3}]$, $f(t) > f(0)$ i.e. $f(t) > 40$

Donc l'équation $f(t) = 40$ n'admet pas de solution sur $]0; \frac{4}{3}]$

* f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]\frac{4}{3}; 10]$

on a $f(\frac{4}{3}) = 120 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6 > 40$

et $f(10) = 640 \cdot e^{-5} \approx 4,3 < 40$

Donc $40 \in [f(10); f(\frac{4}{3})[= f(]\frac{4}{3}; 10])$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\exists ! \alpha \in]\frac{4}{3}; 10]$, $f(\alpha) = 40$

* conclusion : l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive car $\alpha > \frac{4}{3} > 0$

⑦ Procédons par balayage à l'aide de la calculatrice :

On a $f(3) > 40$ et $f(4) < 40$ donc $\alpha \in]3; 4[$

puis $f(3,8) > 40$ et $f(3,9) < 40$ donc $\alpha \in]3,8; 3,9[$

puis $f(3,80) > 40$ et $f(3,81) < 40$ donc $\alpha \in]3,80; 3,81[$

Ainsi, $\alpha \approx 3,8$ à 10^{-1} près

La température redescend à sa valeur initiale de 40°C au bout d'environ 3,8 minutes, i.e. environ 3 minutes et 48 secondes.

3) a) Calculons $\int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 (60t+40) \cdot e^{-0,5t} dt$ à l'aide d'une

intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[0; 4]$:

$$u(t) = 60t + 40 \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-0,5t}$$

$$u'(t) = 60 \quad \text{et} \quad v(t) = -2 e^{-0,5t}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \int_0^4 f(t) \cdot dt &= \left[(60t+40) \times (-2 \cdot e^{-0,5t}) \right]_0^4 - \int_0^4 60 \times (-2 \cdot e^{-0,5t}) \cdot dt \\ &= -2 \left(280 \cdot e^{-2} - 40 \cdot e^0 \right) - 60 \left[4 e^{-0,5t} \right]_0^4 \\ &= -560 e^{-2} + 80 - 60 \left(4 e^{-2} - 4 \cdot e^0 \right) \\ &= -560 e^{-2} + 80 - 240 e^{-2} + 240 \\ &= 320 - 800 \cdot e^{-2} \\ &= \boxed{320 - \frac{800}{e^2}} \end{aligned}$$

b) En prenant $t_1 = 0$ et $t_2 = 4$, on obtient la température moyenne de la réaction chimique au cours des 4 premières minutes:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{4-0} \times \int_0^4 f(t) \cdot dt = \frac{1}{4} \left(320 - \frac{800}{e^2} \right) \\ &= 80 - 200 e^{-2} \text{ } ^\circ\text{C} \\ &= \boxed{\approx 53 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad \text{au degré près} \end{aligned}$$