Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2025

Asie – Sujet 1

11 juin 2025

Ex 1 :

Affirmation 1 : Fausse

Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}\alpha\\3\\\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$

$\forall k\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB}\neq k.\overrightarrow{AC}$ car $\begin{cases}1=k(\alpha-1)\\0=k\times 2\\0=k\times\alpha\end{cases} \iff \begin{cases}k=\frac{1}{\alpha-1}\\k=0\end{cases}$ incompatibles

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et forment un plan (ABC) pour toutes valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$.

Puis on a : $\vec{j}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\times1+1\times0+0\times0=0$ donc $\vec{j}\perp\overrightarrow{AB}$

et $\vec{j}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\times(\alpha-1)+1\times2+0\times\alpha = 0+2+0 = 2 \neq 0$

Ainsi, $\vec{j}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AC}$ directeur du plan (ABC), donc $\vec{j}$ n'est pas normal au plan (ABC).

Rappel : un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan s'il est orthogonal à <u>deux</u> vecteurs <u>non colinéaires</u> dirigeant ce plan.

Affirmation 2 : Fausse

D'après la représentation paramétrique de la droite (d) fournie par l'énoncé, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

Ainsi $(AC) \parallel (d) \iff \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = k.\vec{u}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 1 = k \\ 2 = 2k \\ \alpha = -k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = k+1 \\ k = \frac{2}{2} = 1 \\ \alpha = -k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = k+1 = 1+1 = 2 \\ k = 1 \\ \alpha = -k = -1 \end{cases} \quad \text{incompatibles}$$

Donc $\forall k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} \neq k.\vec{u}$

Il n'existe ainsi aucune valeur de α telle que $(AC) \parallel (d)$

Affirmation 3 : Vraie

Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\times 1 + (-1)\times 0 + 0\times 0 = -1+0+0 = -1$

Par ailleurs, on a : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$ u.l.

et $AO = \|\overrightarrow{AO}\| = \sqrt{\overrightarrow{AO}^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$ u.l.

D'où $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = AO\times AB\times\cos(\widehat{OAB})$

$\iff \cos(\widehat{OAB}) = \dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{AO\times AB} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\times 1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Puis $\widehat{OAB} = \cos^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{135°}$

Affirmation 4 : Fausse

Vérifions tout d'abord si $H \in (d)$:

$$\begin{cases} x_H = 1 + t_H \\ y_H = 2t_H \\ z_H = -t_H \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 1 + t_H \\ 2 = 2t_H \\ 2 = -t_H \end{cases} \iff \begin{cases} t_H = 0 \\ t_H = 1 \\ t_H = -2 \end{cases}$$

incompatibles

Ainsi $H\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \notin (d)$

Donc H ne peut pas être le projeté orthogonal de A sur (d).

Affirmation 5 : Vraie

La sphère de centre O et de rayon 1 est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de l'espace tel que : $OM = 1$

$$\Leftrightarrow OM^2 = 1^2$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 + (z_M - z_O)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Etudions maintenant l'intersection éventuelle de cette sphère avec (d) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1$$
$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + t^2 = 1$$
$$\Rightarrow 6t^2 + 2t = 0$$
$$\Rightarrow 3t^2 + t = 0$$
$$\Rightarrow t(3t+1) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \text{ ou } 3t+1 = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}$$

Il y a donc bien deux points d'intersection entre (d) et la "sphère unité" :

→ le point $I\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, point de (d) de paramètre $t = 0$

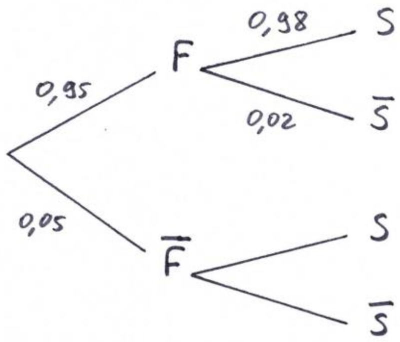
→ le point $J\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$, point de (d) de paramètre $t = -\frac{1}{3}$

Ex 2 :

⟹ Partie A :

1) D'après l'énoncé, $\boxed{P(F) = 0,95}$ et $\boxed{P_F(S) = 0,98}$

2) ⓐ



ⓑ D'après l'énoncé, on a : $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,01$

D'où $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{F} \cap \overline{S})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,01}{0,05} = \dfrac{1}{5} = \boxed{0,2}$

3) $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = \boxed{0,931}$

4) $\{F ; \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S) \\ &= 0,931 + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S) \\ &= 0,931 + 0,05 \times (1 - P_{\overline{F}}(\overline{S})) \\ &= 0,931 + 0,05 \times (1 - 0,2) \\ &= 0,931 + 0,05 \times 0,8 \\ &= 0,931 + 0,04 \\ &= 0,971 \ \boxed{\approx 0,97} \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{aligned}$$

5) $P_S(F) = \dfrac{P(F\cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,931}{0,971} \boxed{\approx 0,96}$ à 10^{-2} près

$\Rightarrow$ Partie B :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \sim \mathcal{B}(n ; 0,95)$

D'où $E(S_n) = n \times p = \boxed{0,95\,n}$

et $V(S_n) = n \times p \times (1-p) = 0,95 \times 0,05 \times n = \boxed{0,0475\,n}$

2) a) $P(S_{150} = 145) = \dbinom{150}{145} \times 0,95^{145} \times (1-0,95)^{150-145} \boxed{\approx 0,109}$ à 10^{-3} près

Interprétation : Sur un échantillon de 150 jouets, la probabilité qu'exactement 145 jouets réussissent le test de fabrication est d'environ 0,109.

b) 94% de 150 jouets correspond à $0,94 \times 150 = 141$ jouets.

On veut $P(S_{150} \geqslant 141) = 1 - P(S_{150} \leqslant 140)$

$\approx 1 - 0,219$ On utilise la fonction de répartition

$\boxed{\approx 0,781}$ à 10^{-3} près

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = \frac{1}{n} \times S_n$

$E(F_n) = E\left(\frac{1}{n} \times S_n\right) = \frac{1}{n} \times E(S_n) = \frac{1}{n} \times 0,95 \times n = \boxed{0,95}$

par linéarité de l'espérance

$$V(F_n) = V\left(\frac{1}{n}\cdot S_n\right) = \frac{1}{n^2}\times V(S_n) = \frac{1}{n^2}\times 0{,}0475n = \boxed{\frac{0{,}0475}{n}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0{,}93 < F_n < 0{,}97$

$$\Leftrightarrow -0{,}02 < F_n - 0{,}95 < 0{,}02$$
$$\Leftrightarrow |F_n - 0{,}95| < 0{,}02$$
$$\Leftrightarrow |F_n - E(F_n)| < 0{,}02$$

On veut $P(0{,}93 < F_n < 0{,}97) \geqslant 0{,}96$

$$\Leftrightarrow P\left(|F_n - E(F_n)| < 0{,}02\right) \geqslant 0{,}96$$
$$\Leftrightarrow 1 - P\left(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0{,}02\right) \geqslant 0{,}96$$
$$\Leftrightarrow P\left(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0{,}02\right) \leqslant 0{,}04$$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0{,}02\right) \leqslant \frac{V(F_n)}{0{,}02^2}$$

Il suffit donc de choisir $n \in \mathbb{N}^*$ tq :

$$\frac{V(F_n)}{0{,}02^2} \leqslant 0{,}04 \Leftrightarrow \frac{\frac{0{,}0475}{n}}{4\times 10^{-4}} \leqslant 0{,}04$$
$$\Leftrightarrow \frac{0{,}0475}{n} \leqslant 0{,}04 \times 4\times 10^{-4}$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{0{,}0475}{0{,}16\times 10^{-4}}$$

Or $\frac{0{,}0475}{0{,}16\times 10^{-4}} = 2968{,}75$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$,

donc il faut au moins $\boxed{n = 2969 \text{ jouets}}$ dans le lot.

Ex 3 :

=> Partie A :

1) Soit (u_n) : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2 + 0{,}8 . u_n$

D'où $u_2 = u_{1+1} = 2 + 0{,}8 \times u_1 = 2 + 0{,}8 \times 2 = 2 + 1{,}6 = \boxed{3{,}6}$

2) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $10 - 8 \times 0{,}8^{1-1} = 10 - 8 \times 1 = 2 = u_1$

=> $\mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$

et montrons que $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^{n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0{,}8 . u_n \\ &= 2 + 0{,}8\left(10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}\right) \quad \text{D'après HR} \\ &= 2 + 8 - 8 \times 0{,}8^{n-1+1} \\ &= 10 - 8 \times 0{,}8^{n} \end{aligned}$$

=> $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} = 10 - \frac{8}{0{,}8} \times 0{,}8^{n} = 10 - 10 \times 0{,}8^{n}$

or $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10 - 10 \times 0 = 10 - 0 = \boxed{10}$

La quantité de médicament dans l'organisme du patient va tendre vers 10 mL.

4) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 10 - 10 \times 0{,}8^n = 10(1-0{,}8^n)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0{,}8^n > 0 \Rightarrow -0{,}8^n < 0$

$$\Rightarrow 1 - 0{,}8^n < 1$$

$$\Rightarrow 10(1-0{,}8^n) < 10$$

$$\Rightarrow u_n < 10$$

Donc $\boxed{\text{l'inéquation } u_N \geqslant 10 \text{ n'admet pas de solution.}}$

$\boxed{\text{La quantité de médicament dans l'organisme du patient restera toujours strictement inférieure à 10 mL. Elle ne pourra jamais atteindre ni dépasser 10 mL.}}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut : $u_n > 9$

$$\Leftrightarrow 10 - 10 \times 0{,}8^n > 9$$

$$\Leftrightarrow 10 \times 0{,}8^n < 1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8^n < 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) < \ln 0{,}1 \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln 0{,}8 < \ln 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \quad \text{car } \ln 0{,}8 < 0$$

or $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}3$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc la quantité de médicament dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL $\boxed{\text{à partir de la } 11^{\text{ème}} \text{ prise.}}$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} u_k$

1) $S_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}(2 + 3,6) = 1 + 1,8 = \boxed{2,8}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (10 - 10 \times 0,8^k)$

par linéarité de la somme

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} 10\right) - 10 \times \sum_{k=1}^{n} 0,8^k$$

suite géométrique

$$= 10(n-1+1) - 10 \times 0,8^1 \times \frac{1-0,8^{n-1+1}}{1-0,8}$$

$$= 10n - 8 \times \frac{1-0,8^n}{0,2}$$

$$= 10n - 40(1 - 0,8^n)$$

$$\boxed{= 10n - 40 + 40 \times 0,8^n}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \frac{1}{n}(10n - 40 + 40 \times 0,8^n)$$

$$= 10 - \frac{40}{n} + 40 \times \frac{0,8^n}{n}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{40}{n} = 0$

De plus, $\lim_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{0,8^n}{n} = 0$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$\lim_{n \to +\infty} S_n = 10 - 0 + 40 \times 0 = \boxed{10}$

4) La fonction "mystere (k)" renvoie le plus petit entier n non nul à partir duquel S_n est supérieur ou égal à une valeur k saisie en argument. Ainsi, "mystere (9)" renvoie le plus petit nombre de prises à partir duquel la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade devient supérieure ou égale à 9 mL.

5) D'après l'énoncé, on admet que (S_n) est croissante.

De plus, $S_{10} = 10 - \frac{40}{10} + \frac{40}{10} \times 0,8^{10}$

$= 10 - 4 + 4 \times 0,8^{10}$

$= 6 + 4 \times 0,8^{10}$

$\approx 6,43$

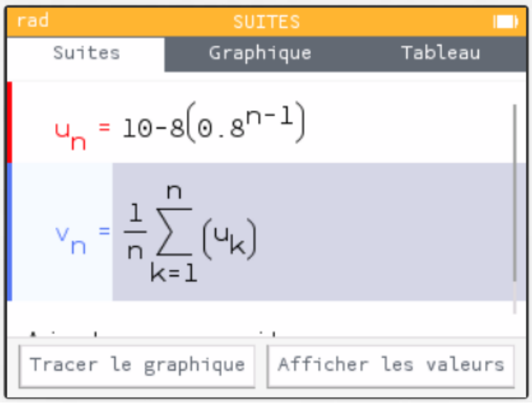
Ainsi, comme $S_{10} < 9$ et que (S_n) est croissante, la valeur recherchée dans la question précédente est forcément strictement supérieure à 10.

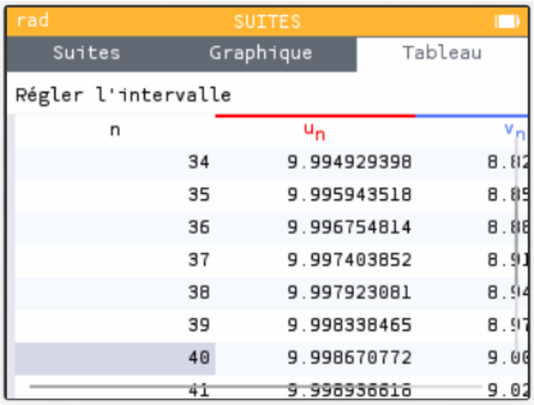
Remarque 1 : Regardons ce que donne le script.

```
def mystere(k):
    n=1
    s=2
    while s<k:
        n=n+1
        s=10-40/n+(40*0.8**n)/n
    return n
```

En lançant le script dans la console, on obtient :

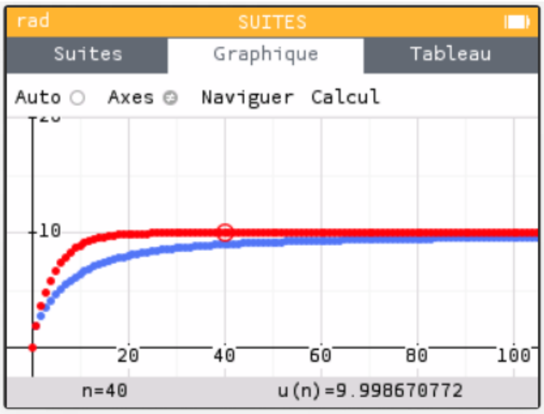
```
>>> mystere(9)
40
```





Sur la calculatrice, on note $S_n = v_n$ et il faut bien lire la colonne v_n partiellement masquée sur l'écran de droite. On peut constater que $v_{39} \approx 8,9745 < 9$ et que $v_{40} \approx 9,0001 \geq 9$

<u>Remarque 2 :</u> Dans la question 3) de la partie B, nous avons obtenu un résultat assez étonnant à première vue. En effet, la limite des moyennes arithmétiques (S_n) des termes d'une suite (u_n) tend vers la même limite que la suite (u_n).



Il s'agit du « *théorème de Cesàro* », également appelé « *lemme de Cesàro* ». Ce théorème, grand classique dans l'enseignement supérieur, précise que :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, avec la notation de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$. Alors la suite de ses moyennes arithmétiques $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, aussi appelée « *suite des moyennes de Cesàro* », est définie comme dans l'exercice précédent par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

➔ Attention : Il s'agit d'une simple implication et non d'une équivalence. Pour vous en convaincre, il suffit de considérer la suite $u_n = (-1)^n$ qui ne converge évidemment pas, mais dont la suite des moyennes de Cesàro converge vers 0.

Ex 4 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad$ et $\quad g(x) = e^{\sqrt{x}}$

1) ⓐ La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

D'où $\quad g'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \boxed{f(x)}$

ⓑ La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de la fonction u par la fonction inverse dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par produit par une constante. Puis comme g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} \times e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left(\frac{-1}{4x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}} \right)$$

$$\boxed{= \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}}$$

2) a) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$

Puis par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$

Enfin, par produit par $\frac{1}{2}$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

b) La droite d'équation $x = 0$ (i.e. l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3) a) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

et d'après le théorème des croissances comparées : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$

Ainsi, par composition (ou en posant $X = \sqrt{x}$), on obtient

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$

Enfin, par produit par $\frac{1}{2}$, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geqslant 0 \iff \sqrt{x} - 1 \geqslant 0$

$\iff \sqrt{x} \geqslant 1$

$\iff x \geqslant 1$) par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = \frac{e^{\sqrt{1}}}{2\sqrt{1}} = \frac{e}{2}$

ⓒ f est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u> sur $[1\,;+\infty[$

On a $f(1) = \frac{e}{2} \simeq 1{,}36 < 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc $2 \in \left[f(1)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= f([1\,;+\infty[)$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 2 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [1\,;+\infty[}$

Puis par balayage avec la calculatrice :

$f(4) < 2$ et $f(5) > 2$ donc $\alpha \in\,]4\,;5[$

$f(4{,}6) < 2$ et $f(4{,}7) > 2$ donc $\alpha \in\,]4{,}6\,;4{,}7[$

$f(4{,}63) < 2$ et $f(4{,}64) > 2$ donc $\alpha \in\,]4{,}63\,;4{,}64[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq 4{,}6}$ à 10^{-1} près

4) a) $I = \int_1^2 f(x)\,.\,dx$

d'après la question 1.a), g est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$

$= \left[g(x) \right]_1^2$

$= \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^2$

$= e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{1}}$

$= \boxed{e^{\sqrt{2}} - e}$

b) f est continue (car dérivable) et positive sur $[1 ; 2]$.

En effet, f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ et $f(1) = \frac{e}{2} > 0$

Donc I correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(x - 3\sqrt{x} + 3\right)}{8\,x^2 . \sqrt{x}}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0 \iff \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X^2 - 3X + 3 > 0 \end{cases}$

Etudions la fonction polynôme $X^2 - 3X + 3$:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 < 0$

Ainsi, $X^2 - 3X + 3$ n'a pas de racine réelle.

Il est donc du signe de son coefficient dominant $a = 1 > 0$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$

On a ainsi : $\forall X \in \mathbb{R}, \ X^2 - 3X + 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x - 3\sqrt{x} + 3 > 0}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ e^{\sqrt{x}} > 0$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f''(x) > 0$

D'où $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$