

Mathsapiens.fr



Baccalauréat général

Session 2025

Amérique du Nord – Sujet 2

Sujet de secours

22 mai 2025

Ex1:

⇒ Partie A: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-x} + 2x - 1$

1) * En $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Puis par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 = -\infty$

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

* En $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

On $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (th. des croissances comparées)

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = 0^+$

$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{00} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \cdot e^x = -0^- = 0^+ \text{ (th. croissances comparées)} \end{array} \right.$

Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 \\ &= (1-x) \cdot e^{-x} + 2 \end{aligned}$$

3) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) + 0 \\ &= (-1 - (1-x)) e^{-x} \\ &= \boxed{(x-2) \cdot e^{-x}} \end{aligned}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-2$.

$$\text{D'où } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	concave		convexe

inflexion

5) On utilise la question précédente pour le signe de f'' .

$$\text{Par ailleurs, } f'(2) = (1-2) \cdot e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$		$2 - e^{-2}$	

6) f' admet un minimum global en $x=2$ qui vaut $f'(2) = 2 - e^{-2} \approx 1,86 > 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

7) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

on $0 \in]-\infty; +\infty[$ intervalle image par f de son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\boxed{\exists ! \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = 0}$$

ensemble de définition de f

Puis par balayage avec la calculatrice, on obtient:

$$f(0) < 0 \text{ et } f(1) > 0 \quad \text{donc } \alpha \in]0; 1[$$

$$f(0,3) < 0 \text{ et } f(0,4) > 0 \quad \text{donc } \alpha \in]0,3; 0,4[$$

$$f(0,37) < 0 \text{ et } f(0,38) > 0 \quad \text{donc } \boxed{\alpha \in]0,37; 0,38[}$$

8) Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 2x - 1$

On a ainsi $E_g = \Delta$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = x \cdot e^{-x} + 2x - 1 - (2x - 1) = x \cdot e^{-x}$

on $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $f(x) - g(x)$ est du signe de x sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$
Position relative	E_f en dessous de Δ	Intersection	E_f au-dessus de Δ

⇒ Partie B:

$$1) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad I_m = \int_1^m x \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Effectuons une intégration par parties en introduisant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[1; +\infty[$

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad I_m &= \left[-x \cdot e^{-x} \right]_1^m - \int_1^m 1 \cdot (-e^{-x}) \cdot dx \\ &= -m \cdot e^{-m} + 1 \cdot e^{-1} - \int_1^m -e^{-x} \cdot dx \\ &= e^{-1} - m \cdot e^{-m} - \left[e^{-x} \right]_1^m \\ &= e^{-1} - m \cdot e^{-m} - e^{-m} + e^{-1} \\ &= -(1+m) \cdot e^{-m} + 2e^{-1} \\ &= \boxed{2e^{-1} - (m+1) \cdot e^{-m}} \end{aligned}$$

- 2) (a) D'après la question 8) de la partie A, $\mathcal{E}_f$ est au-dessus de Δ sur $[1; +\infty[$ donc $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$
 $\Leftrightarrow \forall x \in [1; +\infty[$, $x \cdot e^{-x} > 0$

De plus, la fonction $x \mapsto x \cdot e^{-x}$ est continue sur $[1; +\infty[$

Donc l'aire du domaine situé entre $\mathcal{E}_f$, Δ et les droites d'équation $x=1$ et $x=m \geq 1$ est égale à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{I}_n = \int_1^n (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^n x \cdot e^{-x} \, dx = \boxed{I_n}$$

⑥ D'après la question 1) de la partie B, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n &= 2e^{-1} - (n+1) \cdot e^{-n} \\ &= 2e^{-1} - n \cdot e^{-n} - e^{-n} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = 0^+$$

car d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$

$$\text{De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0^+$$

$$\text{Donc par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2e^{-1} - 0 - 0 = 2e^{-1}$$

Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire du domaine D_n tend vers une limite finie : $\boxed{2e^{-1}}$ u.a.

Ex 2 :

1) Vraie

 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D' On a $\vec{v} = -2 \vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéairesD'où $D \parallel D'$

2) Fausse

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que l'on suppose orthonormé afin d'utiliser la formule analytique du produit scalaire, on a :

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } C \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

comme $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige la droite D , on calcule :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times (-5) = -3 + 0 - 20 = -23 \neq 0$$

Donc les droites D et (AB) ne sont pas orthogonales.

Comme $(AB) \subset (ABC)$, la droite D ne peut pas être orthogonale à (ABC)

3) Fausse

$$\text{On a } D : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et } \Delta : \begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Étudions leur intersection éventuelle.

$$\begin{aligned}
 D \cap \Delta : \begin{cases} 3-t = -4+2t' \\ -2+3t = 1-3t' \\ 1+4t = 2+t' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 7-2t' & (L_1) \\ 7 = -11+3t' & (L_2 + 3L_1) \\ t = \frac{1}{4}(1+t') & (L_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 7-2t' \\ t' = \frac{1}{3}(7+11) = 6 \\ t = \frac{1}{4}(1+t') \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 7-2 \times 6 = 7-12 = -5 \\ t' = 6 \\ t = \frac{1}{4}(1+6) = \frac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{incompatibles} \end{array}
 \end{aligned}$$

Donc $D \cap \Delta = \emptyset$

4) Vraie

Tout d'abord, $2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = -6 + 9 - 3 = 0$

Donc $F \in P$

Puis on a $E \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or d'après l'équation cartésienne du plan P , $\overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal à P .

D'où $\begin{cases} F \in P \\ \overrightarrow{EF} \text{ normal à } P \end{cases} \Rightarrow F \text{ est le projeté orthogonal de } E \text{ sur } P.$

5) Fausse car il n'y a pas unicité pour a :

D'après son équation cartésienne, P' admet $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -a^2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

De plus, $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige D .

D'où $D \parallel P' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -1 \times (-3) + 3 \times 1 + 4 \times (-a^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 3 + 3 - 4a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ex 3:

1) $P(C) = 0,02$; $P(V) = 0,9$ et $P_C(V) = 0,62$

2) a) On a: $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,02 \times 0,62 = 0,0124$

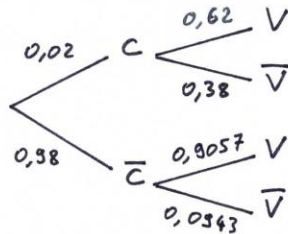
b) On a: $\{C, \bar{C}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V) = 0,9 - 0,0124 = 0,8876$$

3)



$$P(\bar{C} \cap V) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(V)$$

$$\Leftrightarrow P_{\bar{C}}(V) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \frac{0,8876}{0,98} \approx 0,9057$$

$$\text{Puis } P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 1 - P_{\bar{C}}(V) \approx 0,0943$$

4) $P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,0124}{0,9} \approx 0,0138$ (à 10^{-4} près)

Interprétation: la probabilité qu'une personne vaccinée soit contaminée est d'environ 0,0138

5) a) Fausse

D'après l'arbre de probabilités, $\frac{P_{\bar{C}}(V)}{P_{\bar{C}}(\bar{V})} \approx \frac{0,9057}{0,0943} \approx 9,6 \neq 10$

Il y en a presque 10 fois plus.

Rem: Etant donné que 9,6 est très proche de 10, notamment en ordre de grandeur, la réponse "vraie" bien justifiée devrait certainement être acceptée le jour de l'examen.

⑥ Khaie

D'après la question 2.b), on a $P(\bar{E} \cap V) = 0,8876$

$$\text{D'où } P_V(\bar{E}) = \frac{P(\bar{E} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,8876}{0,9} \approx 0,9862 > 0,98$$

ou D'après la question 4), on a $P_V(C) \approx 0,0138$

$$\text{Donc } P_V(\bar{C}) = 1 - P_V(C) \approx 1 - 0,0138 \approx 0,9862 > 0,98$$

6) ② On répète $n = 20$ fois de façon identique et indépendante (choix assimilés à des tirages avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la personne est contaminée" est égale à $p = P(C) = 0,02$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,02$

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(20; 0,02)}$$

$$\begin{aligned} \text{⑥ } P(X=4) &= \binom{20}{4} \times p^4 \times (1-p)^{20-4} \\ &= \frac{20!}{4!(20-4)!} \times 0,02^4 \times (1-0,02)^{16} \\ &= 4845 \times 0,02^4 \times 0,98^{16} \end{aligned}$$

$$\boxed{\approx 0,0006} \quad (\text{à } 10^{-4} \text{ près})$$

Ex4:

 $\Rightarrow$ Partie A:

1)

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

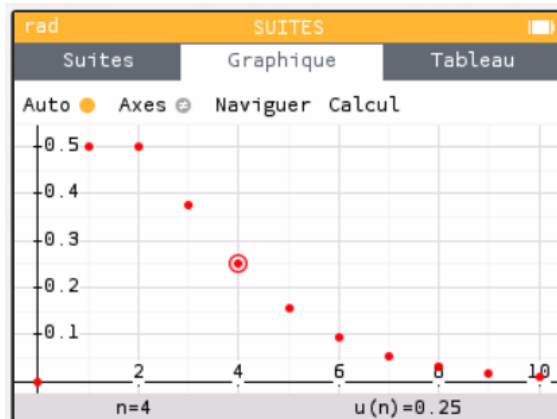
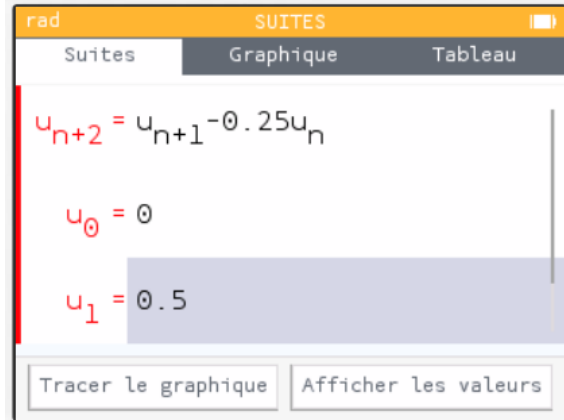
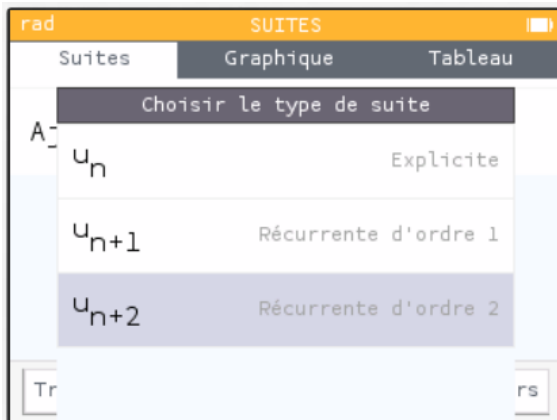
Exemple de calcul (non demandé):

$$u_3 = u_2 - \frac{1}{4} \times u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- 2) Il semble que (u_n) soit décroissante à partir du rang $n=1$ et que ses termes se rapprochent de plus en plus de 0.

On pourra saisir la suite dans la calculatrice pour s'en convaincre.

Conjecture: Il semble que (u_n) converge vers 0



Régler l'intervalle	
n	u_n
3	0.375
4	0.25
5	0.15625
6	0.09375
7	0.0546875
8	0.03125
9	0.017578125
10	0.009765625

$\Rightarrow$ Partie B : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$

et $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

1) $w_0 = u_{0+1} - \frac{1}{2} u_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2} u_{n+1}$

$$= u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$$

$$= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \right)$$

$$= \frac{1}{2} w_n$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2} u_n$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} u_n$

$\hookrightarrow$ D'après la question B.3)

5) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation : Pour $n=0$, $n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0 = u_0$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 et montrons que $u_{n+1} = (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\text{D'après (HR)}: u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

↳ D'après la question 4)

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{(n+1)} \text{ vraie}$$

Conclusion: $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang,
 donc d'après le principe de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow$ Partie C

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{n+1}{2} - n\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1-n}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= (1-n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \forall m \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} > 0$$

Donc $u_{m+1} - u_m$ est du signe de $1-m$

$$\begin{aligned} \text{Soit } m \in \mathbb{N}, (u_m) \text{ décroissante} &\Leftrightarrow u_{m+1} - u_m \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1-m \leq 0 \\ &\Leftrightarrow m \geq 1 \end{aligned}$$

Donc (u_m) est décroissante à partir du rang $m=1$

2) Par produit de facteurs positifs, on a : $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = m \left(\frac{1}{2}\right)^m \geq 0$

Ainsi, (u_m) est minorée par 0.

De plus, d'après la question précédente, (u_m) est décroissante.

Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, (u_m) converge vers un réel $l \geq 0$.

3) l est solution de l'équation :

$$l = l - \frac{1}{4} l \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{1}{4} l \quad \Leftrightarrow \quad l = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

La conjecture de la question A.2) est démontée.

Rem : Pour la question 1) de la partie C, il pourrait être tentant d'étudier le quotient $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ au lieu de la différence $u_{m+1} - u_m$. Néanmoins, la stricte positivité de (u_m) n'est garantie qu'à partir du rang $m=1$ car $u_0=0$. Il faudrait ainsi faire une disjonction de cas à un endroit stratégique pour la question. C'est alors un peu risqué et on préfère étudier $u_{m+1} - u_m$.