Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2025

Amérique du Nord – Sujet 2

22 mai 2025

Ex 1 :

⇒ Partie A :

1) On effectue $\boxed{n = 15}$ lancers identiques et indépendants.

N compte le nombre de paniers marqués, donc $\boxed{p = 0,32}$

Ainsi, $\boxed{N \sim \mathcal{B}(15 ; 0,32)}$

2) $P(N=4) = \binom{15}{4} \times p^4 \times (1-p)^{15-4} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} \times 0,32^4 \times 0,68^{11}$

D'où $\boxed{P(N=4) \approx 0,206}$ à 10^{-3} près

3) On utilise la fonction de répartition de la calculatrice :

$\boxed{P(N \leq 6) \approx 0,828}$ à 10^{-3} près

4) $N \sim \mathcal{B}(15 ; 0,32)$ donc $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = \boxed{4,8}$

5) ⓐ Chaque lancer marqué rapporte 3 points, donc $\boxed{T = 3N}$

ⓑ Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(3N) = 3.E(N) = 3 \times 4,8 = \boxed{14,4}$

Interprétation : S'il effectue un grand nombre de séries, Victor peut en moyenne espérer marquer 14,4 points par série.

ⓒ Tout d'abord, $12 \leq T \leq 18 \iff 12 \leq 3N \leq 18 \iff 4 \leq N \leq 6$

D'où $P(12 \leq T \leq 18) = P(4 \leq N \leq 6)$

$= P(N \leq 6) - P(N \leq 3)$ ↲ fonction de répartition de la calculatrice

$\approx 0,8278 - 0,2420$

$\boxed{\approx 0,586}$ (à 10^{-3} près)

=> Partie B :

1) ⓐ $M_{50} = \frac{1}{50} \times \sum_{k=1}^{50} X_k$

M_{50} représente la variable aléatoire donnant le nombre moyen de points marqués par Victor en 50 matchs.

ⓑ $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$, les X_k sont indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_{50}) = E\left(\frac{1}{50} \times \sum_{k=1}^{50} X_k\right) = \frac{1}{50} \times E\left(\sum_{k=1}^{50} X_k\right) = \frac{1}{50} \times \sum_{k=1}^{50} E(X_k)$$

D'où $E(M_{50}) = \frac{1}{50} \times 50 \times E(X) = E(X) = \boxed{22}$

Puis $V(M_{50}) = V\left(\frac{1}{50} \cdot \sum_{k=1}^{50} X_k\right) = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \times V\left(\sum_{k=1}^{50} X_k\right)$

Par indépendance des X_k, on a alors :

$$V(M_{50}) = \frac{1}{50^2} \times \sum_{k=1}^{50} V(X_k) = \frac{1}{50^{\cancel{2}}} \times \cancel{50} \times V(X)$$

$\Leftrightarrow V(M_{50}) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{13}{10} = \boxed{1,3}$

Rem : On peut aussi directement utiliser les formules $\begin{cases} E(M_n) = E(X) \\ V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \end{cases}$

ⓒ On applique l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

$\forall \delta > 0, \quad P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta}$

On choisit $\delta = 3$ et on utilise la variable aléatoire M_{50} avec $E(M_{50}) = 22$ et $V(M_{50}) = 1,3$

$$P\left(\left|M_{50} - E(M_{50})\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{V(M_{50})}{3^2}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|M_{50} - 22\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{1,3}{9}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P\left(\left|M_{50} - 22\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{13}{90}}$$

d) On utilise le résultat précédent :

$$P\left(\left|M_{50} - 22\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow -P\left(\left|M_{50} - 22\right| \geqslant 3\right) \geqslant -\frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(\left|M_{50} - 22\right| \geqslant 3\right) \geqslant 1 - \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|M_{50} - 22\right| < 3\right) \geqslant \frac{90-13}{90}$$

$$\Leftrightarrow P\left(-3 < M_{50} - 22 < 3\right) \geqslant \frac{77}{90}$$

$$\Leftrightarrow P\left(19 < M_{50} < 25\right) \geqslant \frac{77}{90}$$

Or $\frac{77}{90} > \frac{76,5}{90}$ et $\frac{76,5}{90} = 0,85$

Donc par transitivité, $\boxed{P\left(19 < M_{50} < 25\right) > 0,85}$

2) D'après l'inégalité de concentration, on a :

$$\forall \delta > 0, \quad P\left(\left|M_n - E(X)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n \cdot \delta^2}$$

On a $E(X) = 22$, $V(X) = 65$ et on prend $\delta = 3$

D'où $P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{3^2 \times n}$

Or on veut $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0{,}01$

Donc il suffit d'avoir $\frac{65}{3^2 \times n} < 0{,}01 \iff \frac{65}{9n} < 10^{-2}$

$\iff 9n > 65 \times 10^2$

$\iff n > \frac{6500}{9}$

Or $\frac{6500}{9} \approx 722{,}2$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc en prenant $\boxed{n \geqslant 723}$, on a $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0{,}01$

$\boxed{\text{L'affirmation était donc fausse.}}$

Ex 2 :

=> Partie A : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1) ⓐ $u_1 = \sqrt{u_0} = \boxed{\sqrt{2}}$ et $u_2 = \sqrt{u_1} = \boxed{\sqrt{\sqrt{2}}}$

ⓑ Il semble que $\boxed{(u_n) \text{ soit strictement décroissante et converge vers } 1}$

2) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2}$

Donc on a bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ => $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

et montrons que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

D'après (HR) : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

=> $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$ par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}_+$

=> $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

=> $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

ⓑ D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée (par 1)} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 1$.

ⓒ Soit $x \in [0 ; +\infty[$, $\sqrt{x} = x \iff x = x^2$ et $x \geqslant 0$

$\iff x^2 - x = 0$ et $x \geqslant 0$

$\iff x(x-1) = 0$ et $x \geqslant 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0 ; 1\}}$$

ⓓ On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}_+$

Par ailleurs, d'après la question 2.b), nous savons que (u_n) converge vers $\ell \geqslant 1$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation :

$f(\ell) = \ell \iff \sqrt{\ell} = \ell \underset{\text{d'après 2.c)}}{\iff} \ell = 0$ ou $\ell = 1$

(u_n) étant décroissante et minorée par 1, seule la solution $\ell = 1$ convient. D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

⇒ <u>Partie B :</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$

1) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}\ln(u_n) = \frac{1}{2} v_n$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{2}}$

ⓑ On a $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot q^n = \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{\ln(2)}{2^n}}$

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\ln(2)}{2^n} \iff \ln(2) = 2^n \cdot v_n \iff \ln(2) = \boxed{2^n \times \ln(u_n)}$

2) ⓐ (u_n) est décroissante et on a : $u_6 \approx 1{,}011 \notin]0{,}99 ; 1{,}01[$

$u_7 \approx 1{,}005 \in]0{,}99 ; 1{,}01[$

Donc $\boxed{k = 7}$ est le plus petit entier naturel tq $u_k \in]0{,}99 ; 1{,}01[$

Puis $\boxed{u_7 \approx 1{,}00543}$ à 10^{-5} près

ⓑ D'après l'énoncé, on prend $\ln(x) \approx x - 1$ si $x \in]0{,}99 ; 1{,}01[$

Comme $u_7 \in]0{,}99 ; 1{,}01[$, on a :

$\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \boxed{\approx 0{,}00543}$ à 10^{-3} près

ⓒ D'après la question 1.c), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) = 2^n \times \ln(u_n)$

D'où pour $n = 7$, on obtient :

$\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7) = 128 \times \ln(u_7) \approx 128 \times 0{,}00543$

$\Leftrightarrow \boxed{\ln(2) \approx 0{,}69504}$

3) La boucle "while" permet si nécessaire de faire entrer $a > 1$ dans $]0{,}99 ; 1{,}01[$.

Une fois cet objectif atteint, on utilise la méthode de la question 2).

On approxime ainsi "$\ln(a)$" par "$a - 1$" comme dans la question 2.b),

puis on multiplie cette valeur par "2^n" comme dans la question 2.c).

On complète ainsi le script en écrivant dans l'avant-dernière ligne :

$\boxed{L = (2 ** n) * (a - 1)}$

```
from math import *
def Briggs(a):
    n=0
    while a >= 1.01:
        a=sqrt(a)
        n=n+1
    L=(2**n)*(a-1)
    return L
```

Ex 3 :

=> Partie A :

* Affirmation 1 : Vraie

On a : $2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC}$ car I milieu de [AB]

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AK}$

$= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KM}$

$= \overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{JH}$ car $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{MH}$

* Affirmation 2 : Fausse

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$ donc $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$

Ainsi, $\exists (\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AH} + \mu \overrightarrow{AB}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Ils ne peuvent ainsi pas former une base de l'espace.

* Affirmation 3 : Vraie

$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK}$ car $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IK}$

$= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA}$ car A est le projeté de K sur (IB)

$= -IB \times IA$ car $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ colinéaires de sens contraire

$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ car I milieu de [AB] et AB = 1

$= -\frac{1}{4}$

Rem : Cette partie A ne nécessitait l'emploi de coordonnées, mais on pouvait si on le souhaitait utiliser le R.O.N. $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

=> Partie B :

* Affirmation 4 : Fausse

Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$

De plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$

Puis $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 3 + (-1)\times(-3) + 3\times 8 = 6+3+24 = 33 \neq 0$

$\overrightarrow{AB}$ directeur de (AB) n'est pas orthogonal à $\vec{n}$ vecteur normal du plan $\mathcal{P}$, donc (AB) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$

* Affirmation 5 : Vraie

$\mathcal{P}' \parallel \mathcal{P}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est aussi normal à $\mathcal{P}'$

Puis $B\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix} \in \mathcal{P}'$, d'où $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P}' \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

$\iff 2(x-5) + (-1)\times(y+3) + 3(z-7) = 0$

$\iff 2x - 10 - y - 3 + 3z - 21 = 0$

$\iff 2x - y + 3z - 34 = 0$

$\iff -2x + y - 3z + 34 = 0$

* Affirmation 6 : Vraie

Notons H le projeté orthogonal de $A\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ sur $\mathcal{P}$.

Ainsi, $(AH) \perp \mathcal{P}$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AH).

Puis une représentation paramétrique de (AH) :

$$(AH) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Puis $(AH) \cap \mathcal{P} : \begin{cases} 2x_H - y_H + 3z_H + 6 = 0 \\ x_H = 2 + 2t_H \\ y_H = -t_H \\ z_H = -1 + 3t_H \end{cases}$

$\Rightarrow 2(2+2t_H) - (-t_H) + 3(-1+3t_H) + 6 = 0$

$\Rightarrow 4 + 4t_H + t_H - 3 + 9t_H + 6 = 0$

$\Rightarrow 14t_H + 7 = 0$

$\Rightarrow t_H = \frac{-7}{14}$

$\Rightarrow t_H = -\frac{1}{2}$

D'où $H : \begin{cases} x_H = 2 + 2t_H = 2 + 2 \times \frac{-1}{2} = 2 - 1 = 1 \\ y_H = -t_H = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \\ z_H = -1 + 3t_H = -1 + 3 \times \frac{-1}{2} = -1 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2} \end{cases}$

Enfin, dans le R.O.N. on a : $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

Puis $\text{dist}(A ; \mathcal{P}) = AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\overrightarrow{AH}^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \text{dist}(A ; \mathcal{P}) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\boxed{* \text{ Affirmation 7 : Fausse}}$

On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ directeur de (d) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ directeur de (AB)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \neq \lambda . \overrightarrow{AB}$ car $\vec{u}$ possède une unique composante nulle alors que $\overrightarrow{AB}$ n'en a aucune.

Ainsi, (d) et (AB) ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires. Etudions l'éventuelle intersection de (d) et de (AB) pour savoir si elles sont sécantes ou non coplanaires.

On a : $(d) : \begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ et $(AB) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

D'où $(d) \cap (AB) : \begin{cases} -12 + 2k = 2 + 3t \\ 6 = -3t \\ 3 - 5k = -1 + 8t \end{cases} \iff \begin{cases} 2k = 14 + 3t \\ t = -2 \\ 5k = 4 - 8t \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} k = \frac{1}{2}\left(14 + 3 \times (-2)\right) \\ t = -2 \\ k = \frac{1}{5}\left(4 - 8 \times (-2)\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = \frac{1}{2} \times 8 \\ t = -2 \\ k = \frac{1}{5} \times 20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$ compatibles

Donc (d) et (AB) sont sécantes en I, point de paramètre $k = 4$ de (d), qui est également le point de paramètre $t = -2$ de (AB).

Ainsi, (d) et (AB) sont coplanaires.

Ex 4 :

=> Partie A : $\forall x \in [0;\pi]$, $f(x) = e^x . \sin(x)$

1) ⓐ f est dérivable sur $[0;\pi]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;\pi]$.

$\forall x \in [0;\pi]$, $f'(x) = e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x)$

$= \boxed{e^x(\sin(x) + \cos(x))}$

Il s'agit d'une dérivée de la forme : $(u.v)' = u'.v + u.v'$

avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$

$u'(x) = e^x$ $v'(x) = \cos(x)$

ⓑ $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\sin(x) + \cos(x)$

or : $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) > 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

et $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) > 0$ et $\sin(0) = 0$

Donc par somme, $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) + \cos(x) > 0$

D'où $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) > 0$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } [0;\frac{\pi}{2}]}$

2) ⓐ On a : $f(0) = e^0 \times \sin(0) = 1 \times 0 = 0$

et $f'(0) = e^0(\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0+1) = 1$

D'où T : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$\Leftrightarrow y = 1 \times x + 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = x}$ T est la première bissectrice.

ⓑ f' est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ comme somme puis produit de fonctions dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ f''(x) = e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right) + e^x\left(\cos(x)-\sin(x)\right)$$
$$= e^x\left(\cancel{\sin(x)} + \cos(x) + \cos(x) - \cancel{\sin(x)}\right)$$
$$= 2e^x.\cos(x)$$

Or $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $e^x > 0$ et $\cos(x) \geqslant 0$

D'où $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) \geqslant 0$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est convexe sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right]}$

ⓒ f est convexe sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle.

Notamment en $x=0$, on a $\mathcal{C}_f$ au-dessus de T d'éq. $y=x$

Ceci se traduit par : $\boxed{\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ e^x.\sin(x) \geqslant x}$

3) L'expression de f'' est également valable sur $[0;\pi]$.

Ainsi, $\forall x \in [0;\pi]$, $f''(x) = 2e^x.\cos(x)$

$\forall x \in [0;\pi]$, $2e^x > 0$ donc f'' est du signe de $\cos(x)$

On a : $\begin{cases} \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(x) > 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \forall x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right],\ \cos(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 \text{ sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f''(x) < 0 \text{ sur } \left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$

f'' s'annule <u>et</u> change de signe en $x = \frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{\text{le point de } \mathcal{C}_f \text{ d'abscisse } \frac{\pi}{2} \text{ est un point d'inflexion}}$

$\Rightarrow$ <u>Partie B :</u> $I = \int_0^{\pi/2} e^x . \sin(x) . dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} e^x . \cos(x) . dx$

1) Procédons à une première IPP pour I en posant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$:

$u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin(x)$

$u'(x) = e^x$ et $v(x) = -\cos(x)$

D'où $I = \left[-e^x . \cos(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -e^x . \cos(x) . dx$

$\Leftrightarrow I = -e^{\pi/2} . \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^0 . \cos(0) + \int_0^{\pi/2} e^x . \cos(x) . dx$

$\Leftrightarrow I = -e^{\pi/2} \times 0 + 1 \times 1 + J$

$\Leftrightarrow \boxed{I = 1 + J}$

Procédons maintenant de même en changeant les rôles des fonctions u et v :

$u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = e^x$

$u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = e^x$

D'où $I = \left[e^x . \sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x . \cos(x) . dx$

$\Leftrightarrow I = e^{\pi/2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \times \sin(0) - J$

$\Leftrightarrow I = e^{\pi/2} \times 1 - 1 \times 0 - J$

$\Leftrightarrow \boxed{I = e^{\pi/2} - J}$

2) On a : $\begin{cases} I = 1 + J \\ I = e^{\pi/2} - J \end{cases}$

Donc par somme : $2I = 1 + \cancel{J} + e^{\pi/2} - \cancel{J}$

$\iff 2I = 1 + e^{\pi/2}$

$\iff \boxed{I = \dfrac{1+e^{\pi/2}}{2}}$

<u>Rem :</u> On pourrait également obtenir par différence que $J = \dfrac{e^{\pi/2}-1}{2}$

3) Les fonctions f et g sont continues (car dérivables) sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

Par ailleurs, d'après la question 2.c) de la partie A, on a :

$\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $e^x . \sin(x) \geqslant x \iff f(x) \geqslant g(x)$

$\iff f(x) - g(x) \geqslant 0$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré situé entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} \big(f(x) - g(x)\big) . dx$$

par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^{\pi/2} f(x) . dx - \int_0^{\pi/2} g(x) . dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^x . \sin(x) . dx - \int_0^{\pi/2} x . dx$$

$$= I - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \boxed{\frac{1+e^{\pi/2}}{2} - \frac{\pi^2}{8}} \text{ u.a.}$$