Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2025

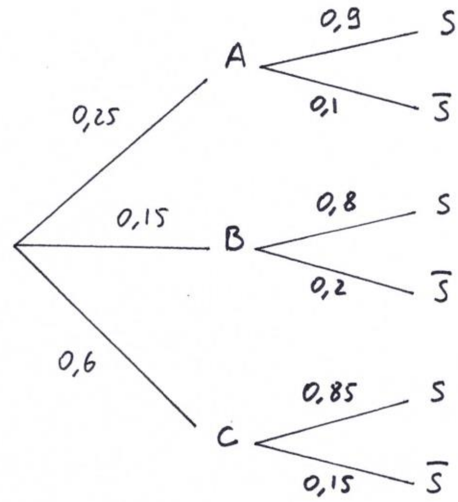
Amérique du Nord – Sujet 1

21 mai 2025

Ex1 :

⟹ Partie A :

1)



2) $P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = \boxed{0,12}$

3) $P(C \cap \overline{S}) = P(C) \times P_C(\overline{S}) = 0,6 \times 0,15 = \boxed{0,09}$

Interprétation : La probabilité que la connexion passe par le serveur C et ne soit pas stable est égale à 0,09.

4) $\{A ; B ; C\}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) \\ &= P(A) \times P_A(S) + 0,12 + P(C) \times P_C(S) \\ &= 0,25 \times 0,9 + 0,12 + 0,6 \times 0,85 \\ &= 0,225 + 0,12 + 0,51 \\ &= \boxed{0,855} \end{aligned}$$

5) $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} = \dfrac{120}{855} = \dfrac{8}{57} \boxed{\approx 0,140}$ (à 10^{-3} près)

important ⚠

=> Partie B :

1) ⓐ On répète $n = 50$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la connexion est instable" est égale à $p = P(\overline{S}) = 0{,}145$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 50}$ et $\boxed{p = 0{,}145}$

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}145)$

ⓑ En utilisant la fonction de répartition de la calculatrice, on obtient :

$\boxed{P(X \leqslant 8) \approx 0{,}704}$ (à 10^{-3} près)

2) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}145)$

$p_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}145^0 \times (1-0{,}145)^{n-0}$

$\iff p_n = 1 - 1 \times 1 \times 0{,}855^n = 1 - 0{,}855^n$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 1 - 0{,}855^n}$

ⓑ On veut $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p_n \geqslant 0{,}99$

$\iff 1 - 0{,}855^n \geqslant 0{,}99$

$\iff 0{,}855^n \leqslant 0{,}01$

$\iff \ln(0{,}855^n) \leqslant \ln 0{,}01$) par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \times \ln 0{,}855 \leqslant \ln 0{,}01$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}855}$) car $\ln 0{,}855 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}855} \approx 29{,}4$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\boxed{\text{il faut au moins } n = 30}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}145)$

Donc $E(X_n) = 0{,}145\,n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \dfrac{X_n}{n}$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0{,}145\,n = \boxed{0{,}145}$$

b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V :

$$\forall \delta > 0, \quad P\left(|X-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité à F_n en prenant $\delta = 0{,}1$, sachant que $E(F_n) = 0{,}145$ et en admettant que $V(F_n) = \dfrac{0{,}123975}{n}$

$$P\left(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \frac{V(F_n)}{0{,}1^2}$$

$$\Leftrightarrow P\left(|F_n - 0{,}145| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \frac{0{,}123975}{0{,}01 \times n}$$

$$\Leftrightarrow P\left(|F_n - 0{,}145| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \frac{12{,}3975}{n}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{12{,}3975}{n} \leqslant \dfrac{12{,}5}{n}$

Donc par transitivité, on obtient :

$$\boxed{P\left(|F_n - 0{,}145| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \frac{12{,}5}{n}}$$

(c) On donne $F_{1000} = 0,3$

Ainsi, $\left| F_{1000} - 0,145 \right| = \left| 0,3 - 0,145 \right| = 0,155 \geqslant 0,1$

D'après la question précédente, la probabilité de cet événement est majorée par $\frac{12,5}{1000} = 0,0125$ (qui est très faible).

Le responsable de l'entreprise a donc raison de soupçonner un dysfonctionnement des serveurs.

Ex2 :

(u_n) : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$

(u_n) bien définie

1) $u_1 = \dfrac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \boxed{\dfrac{5}{4}}$

2) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$ (car (a_n) bien définie)

$a_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{2}{2 - 1} = \boxed{2}$

$a_1 = \dfrac{u_1}{u_1 - 1} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{4} \times 4 = \boxed{5}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \frac{u_n + 2}{u_n + 2}} = \dfrac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n - 1} = \dfrac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1} = 3\dfrac{u_n}{u_n - 1} + \dfrac{-u_n + 1}{u_n - 1}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_{n+1} = 3a_n - 1}$

ⓒ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n - 1$

Initialisation : Pour $n = 1$

on a : $a_1 = 5$

et $3n - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2 \leqslant a_1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $a_n \geqslant 3n-1$

et montrons que $a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1$ i.e. $a_{n+1} \geqslant 3n+2$

D'après la question (b), on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$

D'où : HR $a_n \geqslant 3n-1 \Rightarrow 3a_n \geqslant 3(3n-1)$

$\Rightarrow 3a_n \geqslant 9n-3$

$\Rightarrow 3a_n - 1 \geqslant 9n-4$

$\Rightarrow a_{n+1} \geqslant 9n-4$

Pour utiliser la transitivité, résolvons l'inéquation suivante :

$9n-4 \geqslant 3n+2 \iff 6n \geqslant 6 \iff n \geqslant 1$

On a donc bien par transitivité : $a_{n+1} \geqslant 9n-4 \geqslant 3n+2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n \geqslant 3n-1}$$

(d) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n-1 = +\infty$

Par ailleurs, d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n-1$

Donc d'après le théorème de comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty}$

3) a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

$\Longleftrightarrow \quad a_n(u_n - 1) = u_n \quad$ et $\quad u_n - 1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow \quad a_n \cdot u_n - a_n - u_n = 0 \quad$ et $\quad u_n \neq 1$

$\Longleftrightarrow \quad u_n(a_n - 1) = a_n \quad$ et $\quad u_n \neq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 1$
car $u_n \neq u_n - 1$
(sinon $0 = -1$)

$\Longleftrightarrow \quad u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1} \quad$ et $u_n \neq 1$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}}$

b) Démontrons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \neq 0$

D'après la question 2.c), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n \geqslant 3n - 1 \geqslant 3\times 1 - 1 \geqslant 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0$

Par ailleurs, d'après la question 2.a), $a_0 = 2 \neq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \neq 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1} = \dfrac{1}{\frac{a_n - 1}{a_n}} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$

D'après la question 2.d), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0^+$

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1 - 0^+} = \dfrac{1}{1^-} = 1^+$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$

4.a) La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1.

Ainsi, en partant de $u_0 = 2$, le programme tourne tant que la différence entre u_n et sa limite 1 est strictement supérieure à une valeur p (précision) donnée en argument.
La fonction « $algo(p)$ » renvoie donc en premier résultat le plus petit rang n à partir duquel l'écart entre u_n et sa limite 1 devient inférieur ou égal à la valeur p (précision). La valeur u renvoyée en deuxième résultat correspond à la valeur de u_n pour le rang n renvoyé précédemment par le programme.

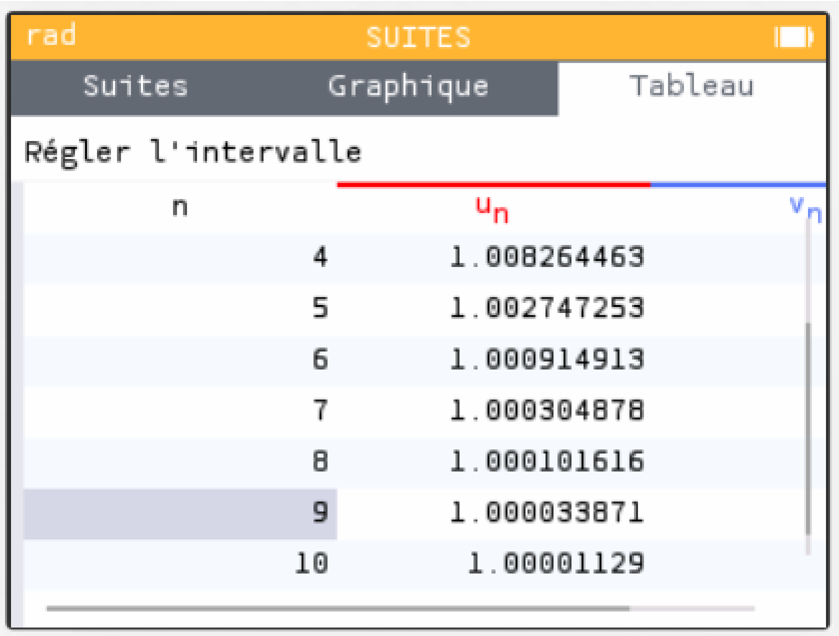
```python
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

4.b) Le script renvoie $n = 9$ pour $p = 0,001$

```
>>> algo(0.0001)
(9, 1.000033870749221)
```

Le terme u_9 est donc le premier terme de la suite pour lequel $u_n \leq 1,001$

C'est exactement ce que l'on retrouve avec la calculatrice :



Ex 3 :

$\boxed{\text{Affirmation 1 : Vraie}}$

(d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$ par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \neq k\vec{j}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, (d) et $(O,\vec{j})$ ne sont pas parallèles. Elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Puis on a : $(d) : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = -1 \\ z = 2-6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(O,\vec{j}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

Recherchons l'éventuelle intersection de (d) et $(O,\vec{j})$:

$(d) \cap (O,\vec{j}) : \begin{cases} 3-2t = 0 \\ -1 = s \\ 2-6t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 3 \\ s = -1 \\ 6t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ s = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$ incompatibles

Donc $(d) \cap (O,\vec{j}) = \emptyset$

Ainsi (d) et $(O,\vec{j})$ sont non coplanaires

$\boxed{\text{Affirmation 2 : Vraie}}$

le plan $\mathcal{P}'$ tel que $(d) \perp \mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ directeur de (d)

Comme $A\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix} \in \mathcal{P}'$, on a :

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P}' \iff \vec{u}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ $\qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+3\\z+2\end{pmatrix}$

$\iff -2(x-3) + 0\times(y+3) + (-6)\times(z+2) = 0$

$\iff -2x + 6 - 6z - 12 = 0$

$\iff -2x - 6z - 6 = 0$

$\iff x + 3z + 3 = 0$

Affirmation 3 : Fausse

On a $C \in (d)$ tq $x_C = 2 \Leftrightarrow 3-2t_C = 2 \Leftrightarrow 2t_C = 1 \Leftrightarrow t_C = \frac{1}{2}$

D'où $z_C = 2-6.t_C = 2-6\times\frac{1}{2} = 2-3 = -1$

Ainsi, on a : $C\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

De plus, on a dans le R.O.N. : $A\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-1) + (-1)\times 2 + 1\times 1 = -2-2+1 = -3$

Par ailleurs : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

On a enfin : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$$

D'où $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{\pi}{6}$

Affirmation 4 : Vraie

H est le projeté orthogonal de $B\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$ sur $\mathcal{P}$ d'équation : $x+3z-7=0$

Ainsi $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de (HB).

Comme $B\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix} \in (HB)$, on a : $(HB) : \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -4 \\ z = -1+3\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Puis $(HB) \cap \mathcal{P}$: $\begin{cases} x_H + 3z_H - 7 = 0 \\ x_H = 5+\lambda_H \\ y_H = -4 \\ z_H = -1+3\lambda_H \end{cases}$

$\Rightarrow 5+\lambda_H + 3(-1+3\lambda_H) - 7 = 0$

$\Rightarrow 5+\lambda_H - 3 + 9\lambda_H - 7 = 0$

$\Rightarrow 10\lambda_H = 5$

$\Rightarrow \lambda_H = \frac{1}{2}$

D'où $\begin{cases} x_H = 5+\lambda_H = 5+\frac{1}{2} = \frac{11}{2} \\ y_H = -4 \\ z_H = -1+3\lambda_H = -1+3\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi, $(HB) \cap \mathcal{P} = \left\{ H\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\-4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \right\}$

Puis $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1/2\\0\\3/2\end{pmatrix}$

D'où $BH = \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{\overrightarrow{BH}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Ex4 :

⇒ Partie A :

1) La courbe $\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ correspond à la fonction } g}$, et $\boxed{\mathcal{C}_2 \text{ à } g'}$.

En effet, la courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$ et $x = 1$, correspondant aux extremums locaux de $\mathcal{C}_1$.

De plus, on a le tableau suivant avec la précision que permet la représentation graphique :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
g' $(\mathcal{C}_2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g $(\mathcal{C}_1)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

2) La tangente à $\mathcal{C}_g$ (ici $\mathcal{C}_1$) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = g'(0) \times (x - 0) + g(0)$

Le point de coordonnées $(0 ; 1)$ appartient à $\mathcal{C}_1$ donc $g(0) = 1$

Puis le point de coordonnées $(0 ; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_2$ donc $g'(0) = 2$

D'où l'équation de tangente : $\boxed{y = 2x + 1}$

$\Rightarrow$ <u>Partie B :</u> $(E) : \quad y + y' = (2x+3)\,e^{-x}$

1) La fonction $f_0 : x \mapsto (x^2+3x) \cdot e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0'(x) = (2x+3) \cdot e^{-x} + (x^2+3x) \times (-e^{-x})$

$$= (2x+3) \cdot e^{-x} - (x^2+3x) \cdot e^{-x}$$

On a immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) + f_0'(x) = \cancel{(x^2+3x) \cdot e^{-x}} + (2x+3) \cdot e^{-x} - \cancel{(x^2+3x) \cdot e^{-x}}$$

$$= (2x+3) \cdot e^{-x}$$

Donc $\boxed{f_0 \text{ est solution particulière de } (E).}$

2) Soit $(E_0) : y + y' = 0$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

$y + y' = 0 \iff y = -y'$

Donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ x \mapsto \lambda\, e^{-x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

3) La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (E_0) et d'une solution particulière.

On a donc : $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + (x^2+3x) \cdot e^{-x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \boxed{\left\{ x \mapsto (x^2+3x+\lambda) \cdot e^{-x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

4) g est solution de (E) et $g(0)=1$, ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x^2+3x+\lambda).e^{-x}$ avec λ à déterminer

Déterminons λ avec $g(0)=1 \iff (0^2+3\times 0+\lambda).e^{-0}=1$

$\iff \lambda \times 1 = 1$

$\iff \lambda = 1$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x^2+3x+1).e^{-x}}$

5) Notons h les fonctions recherchées.

h est solution de (E) donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x^2+3x+\lambda).e^{-x}$

Pour déterminer λ, dérivons deux fois h qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = (2x+3).e^{-x} + (x^2+3x+\lambda)\times(-e^{-x})$

$= (-x^2-x+3-\lambda).e^{-x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = (-2x-1).e^{-x} + (-x^2-x+3-\lambda).(-e^{-x})$

$= (x^2-x-4+\lambda).e^{-x}$

Pour que $\mathcal{C}_h$ admettent exactement deux points d'inflexion, il faut que h'' s'annule exactement deux fois en changeant de signe sur $\mathbb{R}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}>0$ donc $h''(x)$ est du signe de $x^2-x-4+\lambda$, fonction polynôme du second degré. Nous voulons donc :

$\Delta > 0 \iff (-1)^2-4\times 1\times(-4+\lambda)>0 \iff 1+16-4\lambda>0 \iff \lambda < \frac{17}{4}$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x^2+3x+\lambda).e^{-x} \ ,\ \lambda \in \left]-\infty;\frac{17}{4}\right[}$

$\Rightarrow$ Partie C : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+3x+2)\cdot e^{-x}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{e^x} = \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{3x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + \dfrac{3}{\frac{e^x}{x}} + \dfrac{2}{e^x}$

D'après le théorème des croissances comparées,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0^+$

Donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\frac{e^x}{x}} = +\infty$

Puis comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0^+$

Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2) a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x+3)\cdot e^{-x} + (x^2+3x+2)\times(-e^{-x})$

$= (2x+3-x^2-3x-2)\cdot e^{-x}$

$\boxed{= (-x^2-x+1)\cdot e^{-x}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2-x+1$ sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré concave car son coefficient dominant -1 est négatif. Recherchons ses racines :

$\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 1+4 = 5$

D'où $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

3) Procédons par disjonction de cas :

* f est strictement croissante sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $0 \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

  Par ailleurs, $f(0) = (0^2 + 3 \times 0 + 2) \cdot e^{-0} = 2 \times 1 = 2 > 0$

  Donc f est strictement positive sur $\left[0 ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

* f est strictement décroissante sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

  Donc f est strictement positive sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$

* Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0 ; +\infty[\ , \ f(x) > 0}$, donc $f(x) \geqslant 0$

OU $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 3x + 2) \cdot e^{-x}$

on a $x_1 = -1$ racine évidente de $x \mapsto x^2 + 3x + 2$ car la somme alternée des coefficients est nulle. Puis $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} \iff x_2 = -2$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x+2) \cdot e^{-x}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$, d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \geqslant 0}$

4) Comme f est continue (car dérivable) et positive sur $[0\,;+\infty[$, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine du plan délimité par $(O,\vec{\imath})$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$) vaut :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \,,\quad \mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\cdot dx = F(\alpha) - F(0)$$

Or on admet que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \left(-x^2-5x-7\right).\,e^{-x}$

D'où $F(0) = \left(-0^2-5\times 0-7\right)\times e^{-0} = -7\times 1 = -7$

et $F(\alpha) = \left(-\alpha^2-5\alpha-7\right).\,e^{-\alpha}$

Ainsi, $\boxed{\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \,,\quad \mathcal{A}(\alpha) &= F(\alpha)+7\\ &= \left(-\alpha^2-5\alpha-7\right).\,e^{-\alpha}+7\end{aligned}}$