Ex1 :

⇒ Partie I

Soit (E) : $y' + y = e^{-x}$

1) La fonction $u : x \longmapsto x e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée puis produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x) . e^{-x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) + u(x) = (1-x) e^{-x} + x e^{-x}$

$= e^{-x} - \cancel{x e^{-x}} + \cancel{x e^{-x}}$

$= e^{-x}$

Donc $\boxed{u \text{ est une solution particulière de } (E)}$

2) Soit (E') : $y' + y = 0$ l'éq. diff. homogène associée à (E)

$y' + y = 0 \iff y' = -y$ qui admet pour solution générale $\boxed{h_\lambda(x) = \lambda e^{-x} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

3) Ainsi (E) admet pour solution générale : $f_\lambda(x) = h_\lambda(x) + u(x)$

$= \lambda e^{-x} + x e^{-x} , \lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{= (\lambda + x) e^{-x} , \lambda \in \mathbb{R}}$

4) $g(0) = 2$ revient à déterminer λ tq :

$f_\lambda(0) = 2 \iff (\lambda + 0) \times e^{-0} = 2 \iff \lambda \times 1 = 2 \iff \lambda = 2$

D'où $\boxed{g : x \longmapsto (x+2) . e^{-x}}$

⇒ Partie II :

1) La fonction $h : x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -e^{-x} < 0$ donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Son graphe $\mathcal{C}$ ne peut donc être que la courbe en trait plein.

On pourrait également vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$

2) • Tout d'abord, $\mathcal{C}$ coupe $(O, \vec{j})$ en un point que nous noterons A.

D'où $A\begin{pmatrix} 0 \\ h(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$, et on a : $h(0) = e^{-0} = e^0 = 1$

Ainsi $\boxed{A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{, ce qui permet de placer l'unité sur l'axe des ordonnées}}$

• Ensuite, $\mathcal{C}_k$ coupe $(O, \vec{i})$ en un point que nous noterons B.

D'où $B\begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_k \iff f_k(x_B) = 0$

$\iff (x_B + k)\, e^{-x_B} = 0$

$\iff x_B + k = 0$

$\iff x_B = -k$

• A partir de maintenant, nous allons voir 4 façons de résoudre ce problème. Néanmoins, aucune n'est réellement satisfaisante car elles reposent toutes sur des données approximatives issues de la lecture graphique. Il n'existe malheureusement pas de moyen de répondre plus précisément à cette question.

⇒ Solution 1

Notons C le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k$

Ainsi, $f_k(x_C) = h(x_C) \iff (x_C + k)\cdot e^{-x_C} = e^{-x_C}$

$$\iff (x_C + k - 1)\, e^{-x_C} = 0$$

$$\iff x_C + k - 1 = 0$$

$$\iff x_C = 1 - k$$

Notons E le projeté orthogonal de C sur $(O, \vec{i})$

On remarque que E est le milieu de $[OB]$

D'où $x_E = \frac{1}{2}(x_O + x_B) \iff 1 - k = \frac{1}{2}(0 + (-k))$

$$\iff 1 - k = -\frac{1}{2}k$$

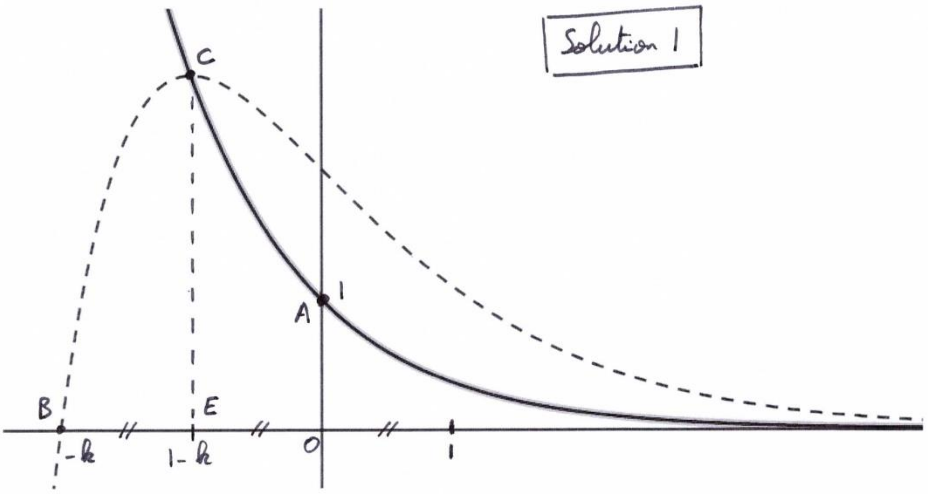
$$\iff k - \frac{1}{2}k = 1$$

$$\iff \frac{1}{2}k = 1$$

$$\iff \boxed{k = 2}$$

Ainsi, $x_E = 1 - k = 1 - 2 = -1$

Il suffit alors de tracer le symétrique de E par rapport à O pour obtenir l'unité sur l'axe des abscisses.



⇒ Solution 2 : On remarque que les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.

Les 2 fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f_k'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+k) \times (-e^{-x}) = (1-x-k) \cdot e^{-x} \\ h'(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Ainsi, $f_k'(0) = h'(0) \iff (1-0-k) \cdot e^{-0} = -e^{-0}$

$\iff (1-k) \times 1 = -1$

$\iff 1-k = -1$

$\iff \boxed{k = 2}$

D'où $x_B = -k = -2$

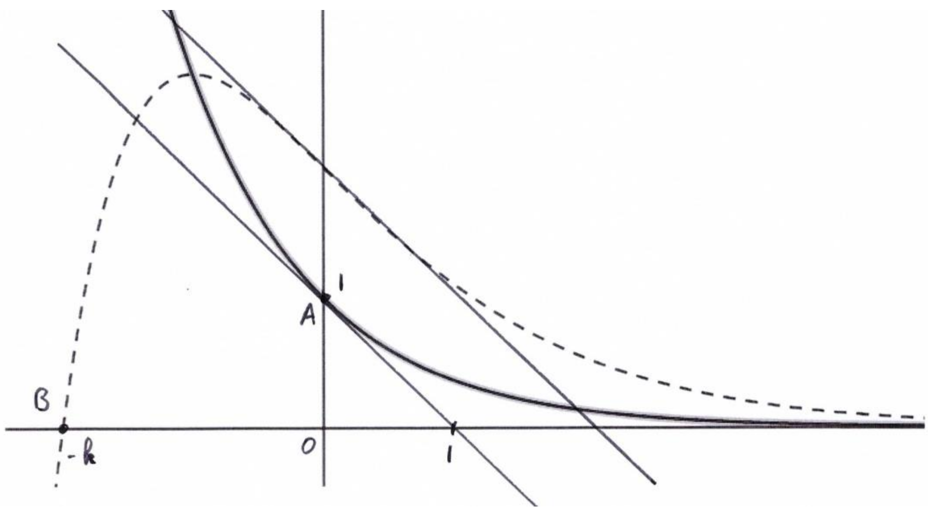
Puis on trace le symétrique de B par rapport à O, permettant d'obtenir le point d'abscisse $x = 2$.

Il suffit ensuite de diviser cette distance par 2 pour tracer l'unité sur $(O, \vec{\imath})$

OU La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en $x = 0$ a pour équation :

$y = h'(0) \times (x - 0) + h(0) \iff y = -1 \times x + e^0 \iff y = -x + 1$

Ainsi, on obtient $x = 1$ en traçant l'intersection de $\mathcal{T}$ et $(O, \vec{\imath})$



$\Rightarrow$ Solution 3 : On remarque que $\mathcal{C}_k$ change de convexité en $x = 0$

D'où $f_k''(0) = 0$

f_k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = (1 - x - k)\, e^{-x}$

puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k''(x) = -e^{-x} + (1 - x - k) \times (-e^{-x}) = (x + k - 2) . e^{-x}$

Enfin, $f_k''(0) = 0 \iff (0 + k - 2) . e^{-0} = 0$

$\iff (k - 2) \times 1 = 0$

$\iff \boxed{k = 2}$

On retrouvait l'unité sur $(0, \vec{\imath})$ à partir des méthodes précédentes,

ou à partir de la tangente $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}_k$ (qui est désormais $\mathcal{C}_2$) en 0.

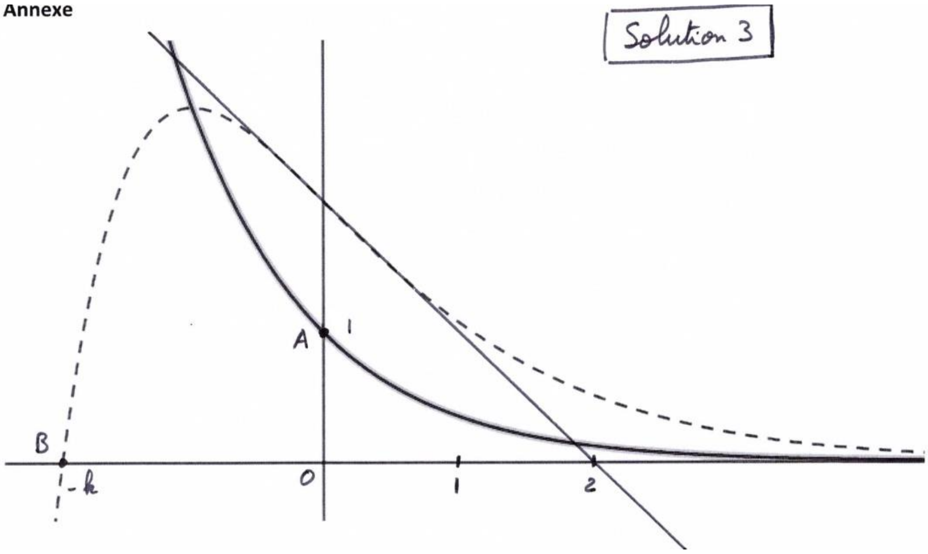
Comme $k = 2$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)\, e^{-x}$ et $f'(x) = (-x - 1) . e^{-x}$

D'où $\mathcal{T}'$: $y = f'(0) . (x - 0) + f(0) \iff y = -x + 2$

Ainsi, on obtient le point d'abscisse 2 en traçant $\mathcal{T}' \cap (0, \vec{\imath})$

$\boxed{\text{Puis en divisant cette distance par 2, on obtient l'unité sur } (0, \vec{\imath})}$

Annexe



Solution 4 : On trace le point D intersection de $\mathcal{C}_k$ et $(O, \vec{j})$

D'où $D\begin{pmatrix} 0 \\ f_k(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_k$

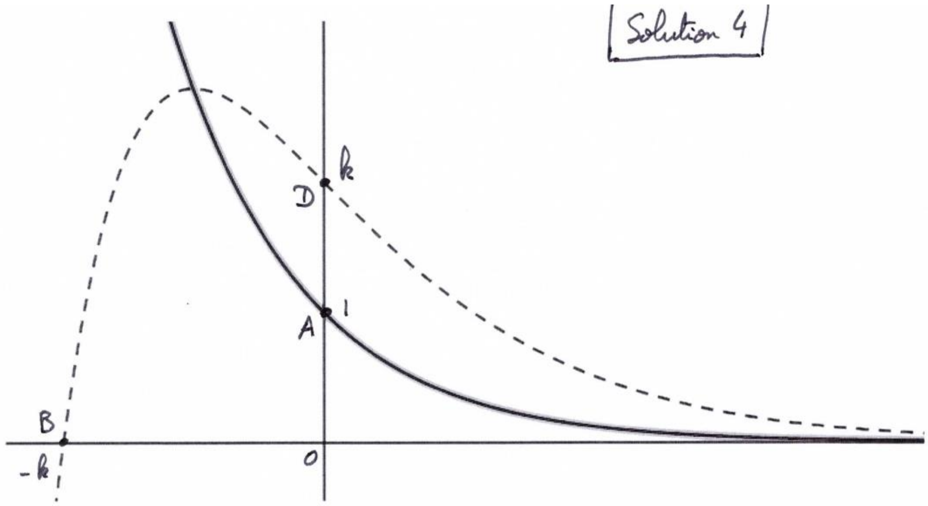
Ainsi $f_k(0) = (0+k) \times e^{-0} = k \times 1 = k$

Puis on remarque que A est le milieu de [O D]

D'où $x_D = 2 \cdot x_A \iff k = 2 \times 1 \iff \boxed{k = 2}$

L'unité sur $(O, \vec{i})$ s'obtient en considérant $B\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis en traçant son symétrique par rapport à O, que nous pouvons noter B'.

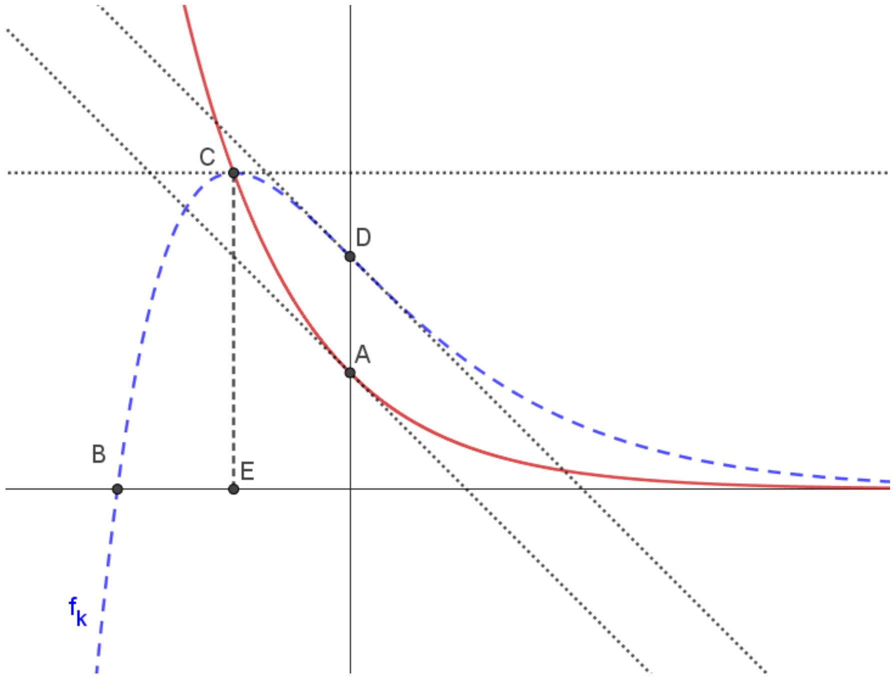
Il suffit alors de prendre le milieu de [OB'] pour obtenir l'unité sur $(O, \vec{i})$.



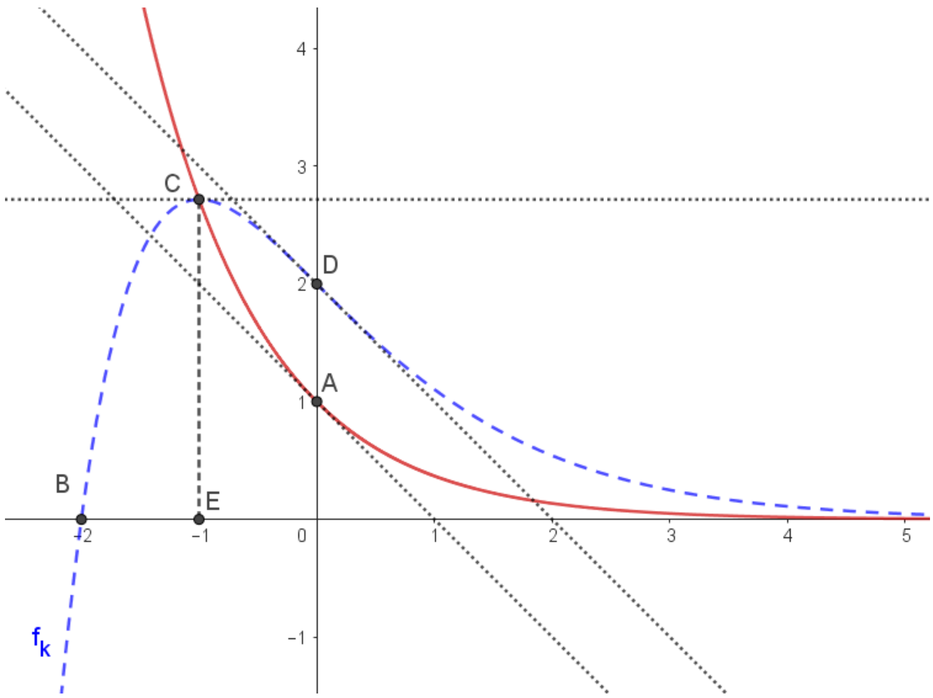
Rem : On pouvait montrer que l'intersection C de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k$ correspond au maximum de $\mathcal{C}_k$. Résoudre $f'_k(x) = 0$ renvoie $x = 1 - k$

Ceci pouvait ensuite être éventuellement utilisé pour placer l'unité sur $(O, \vec{i})$ après avoir déterminé k, mais ne permettait pas de trouver k.

Synthèse sans graduation :



Synthèse après avoir appliqué la graduation :



Ex 2 :

⇒ Partie I :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0;1], \quad f_n(x) = x^n . e^x$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx = \int_0^1 f_n(x) . dx$

1) ⓐ Soit F_1 définie sur $[0;1]$ par : $F_1(x) = (x-1) . e^x$

F_1 est dérivable sur $[0;1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$

Puis $\forall x \in [0;1]$, $F_1'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = (1+x-1) . e^x = x . e^x = f_1(x)$

Donc $\boxed{F_1 \text{ est une primitive de } f_1 \text{ sur } [0;1]}$

ⓑ $I_1 = \int_0^1 f_1(x) . dx = \left[F_1(x)\right]_0^1 = (1-1) . e^1 - (0-1) . e^0 = 0 \times e + 1 \times 1 = \boxed{1}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} . e^x . dx$

On pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = e^x$

$u'(x) = (n+1) . x^n$ et $v'(x) = e^x$

Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $[0;1]$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_{n+1} = \left[x^{n+1} . e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) . x^n . e^x . dx$$

$$= 1^{n+1} . e^1 - 0^{n+1} \times e^0 - (n+1) \int_0^1 x^n . e^x . dx$$

$$= \boxed{e - (n+1) . I_n}$$

3) D'après le résultat précédent :

$I_2 = I_{1+1} = e - (1+1) \times I_1 = e - 2 \times 1 = \boxed{e-2}$

4) "mystere(5)" renvoie la liste : $\boxed{[I_1 \,;\, I_2 \,;\, I_3 \,;\, I_4 \,;\, I_5]}$

i.e. la liste des 5 premiers termes de (I_n).

Explications :

Le premier élément de la liste I_1 est donné par la 1ère ligne de la fonction : "a = 1"

Puis dans la boucle "for", l'instruction "range(1,n)" signifie que i prend les valeurs 1 à n-1. Pour n = 5, il va donc ressortir $(n-1) - 1 + 1 = n - 1 = 4$ éléments successifs de la boucle, à savoir I_2, I_3, I_4 et I_5.

```
from math import e

def mystere(n):
    a=1
    L=[a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i+1)*a
        L.append(a)
    return L
```

```
>>> mystere(5)
[1,
 0.7182818284590451,
 0.5634363430819098,
 0.4645364561314058,
 0.395599547802016]
```

=> Partie II :

1) ⓐ $\boxed{I_n \text{ représente l'aire comprise entre } \mathcal{C}_n\text{, l'axe } (O,\vec{\imath}) \text{ et les droites d'équation } x=0 \text{ et } x=1.}$

ⓑ Il semble que (I_n) converge vers 0^+ : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0^+}$

2)

Tout d'abord, on a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ x^n \geqslant 0 \\ \forall x \in [0;1],\ e^x > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ x^n.e^x \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 x^n.e^x \geqslant 0$$

Par positivité de l'intégrale, avec bornes dans l'ordre croissant

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant 0}$$

Puis on a par croissance de l'exponentielle : $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$

$$\Rightarrow 1 \leqslant e^x \leqslant e$$

Or on a vu précédemment que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ x^n \geqslant 0$

D'où $1 \leqslant e^x \leqslant e \Rightarrow x^n \leqslant x^n.e^x \leqslant x^n.e$

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ x^n.e^x \leqslant x^n.e$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^n.e^x.dx \leqslant \int_0^1 x^n.e.dx$$

par croissance de l'intégrale avec bornes dans l'ordre croissant

$$\Rightarrow \boxed{I_n \leqslant e.\int_0^1 x^n.dx}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant e.\int_0^1 x^n.dx}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 x^n . dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

On a ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n . dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0^+$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} e \int_0^1 x^n . dx = e \times 0^+ = 0^+$

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant e . \int_0^1 x^n . dx$

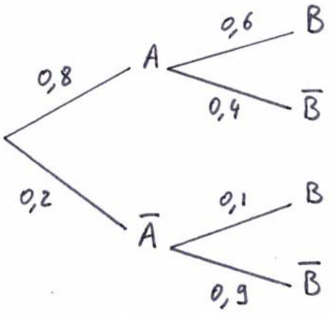
Donc d'après le théorème d'encadrement (th. des gendarmes), $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

Nous venons de démontrer la conjecture émise à la question 1.b .

Ex 3 :

⇒ Partie I :

1)



2) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,8 \times 0,6 = \boxed{0,48}$

3) $\{A ; \bar{A}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,48 + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,48 + 0,2 \times 0,1 = 0,48 + 0,02$

D'où $\boxed{P(B) = 0,5}$

4) X_1 et X_2 suivent une loi de Bernoulli de probabilité respective $\begin{cases} p_1 = 0,8 \\ p_2 = 0,5 \end{cases}$

D'où $\boxed{E(X_1) = p_1 = 0,8}$ et $\boxed{E(X_2) = p_2 = 0,5}$

Rem : On pouvait également expliciter les lois de X_1 et X_2 sous forme d'un tableau.

x_k	0	1
$P(X_1 = x_k)$	0,2	0,8

et

x_k	0	1
$P(X_2 = x_k)$	0,5	0,5

$E(X_1) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,8 = 0,8$

$E(X_2) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0,5$

Puis $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 0,8 + 0,5 = \boxed{1,3}$ (linéarité de l'espérance)

Interprétation : En moyenne, un élève obtient la note de 1,3 à l'exercice 1.

5) a) $P(X=0) = P\big((X_1=0)\cap(X_2=0)\big) = P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

$= 0{,}2 \times 0{,}9$

$= \boxed{0{,}18}$

$P(X=2) = P\big((X_1=1)\cap(X_2=1)\big) = P(A\cap B) = \boxed{0{,}48}$ (cf ②)

D'où $P(X=1) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=2)\big)$

$= 1 - (0{,}18 + 0{,}48)$

$= 1 - 0{,}66$

$= \boxed{0{,}34}$

b) Ecrivons la loi de X :

x_k	0	1	2
$P(X=x_k)$	0,18	0,34	0,48

Puis $V(X) = \sum_{k=0}^{2} (x_k - E(X))^2 \times P(X=x_k)$

$= (x_0-1{,}3)^2 \times P(X=x_0) + (x_1-1{,}3)^2 \times P(X=x_1) + (x_2-1{,}3)^2 \times P(X=x_2)$

$= (0-1{,}3)^2 \times 0{,}18 + (1-1{,}3)^2 \times 0{,}34 + (2-1{,}3)^2 \times 0{,}48$

$= 0{,}3042 - 0{,}0306 + 0{,}2352$

$= \boxed{0{,}57}$

ou formule de König-Huyghens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2{,}26 - 1{,}69 = 0{,}57$

avec $\begin{cases} E(X^2) = \sum_{k=0}^{2} x_k^2 \times P(X=x_k) = 0^2 \times 0{,}18 + 1^2 \times 0{,}34 + 2^2 \times 0{,}48 = 2{,}26 \\ (E(X))^2 = 1{,}3^2 = 1{,}69 \end{cases}$

c) $V(X_1) = p_1 \times (1-p_1) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$

$V(X_2) = p_2 \times (1-p_2) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

$\Rightarrow \boxed{V(X_1) + V(X_2) = 0{,}41 \neq V(X)}$

$\boxed{\text{Ceci était prévisible car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

On a en effet $P_A(B) \neq P(B)$

$\Rightarrow$ Partie II :

1) On répète $n = 8$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la réponse est bonne" est égale à $p = \frac{3}{4}$. D'où Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{3}{4}$

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}\left(8 ; \frac{3}{4}\right)}$$

2) $P(Y=8) = \binom{8}{8} \times p^8 \times (1-p)^{8-8} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^8 = \frac{6561}{65536}}$

3) $E(Y) = n \times p = \cancel{8}^{2} \times \frac{3}{\cancel{4}_{1}} = \boxed{6}$

$V(Y) = n \times p \times (1-p) = 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \cancel{6}^{3} \times \frac{1}{\cancel{4}_{2}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow$ Partie III :

1) Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Z) = E(X) + E(Y) = 1{,}3 + 6 = \boxed{7{,}3}$

X et Y étant indépendantes, on a : $V(Z) = V(X) + V(Y) = 0{,}57 + 1{,}5 = \boxed{2{,}07}$

2) a) On a : $M_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i$

toutes les Z_i sont identiques

D'où $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n} \times E(Z) = \boxed{7{,}3}$

b) On a $V(M_n) = \frac{1}{n} \cdot V(Z) = \frac{1}{n} \times 2{,}07$

D'où $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{2{,}07}$

On veut $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}5 \iff \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{2{,}07} \leqslant 0{,}5 \iff \sqrt{n} \geqslant \frac{\sqrt{2{,}07}}{0{,}5}$

$\iff \sqrt{n} \geqslant 2.\sqrt{2{,}07}$

Or on veut $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 4 \times 2{,}07$ i.e. $n \geqslant 8{,}28$ D'où $\boxed{n \geqslant 9}$

ⓒ Tout d'abord, on a :

$$P(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3) = P(-1 \leqslant M_n - 7{,}3 \leqslant 1) = P(|M_n - E(Z)| \leqslant 1)$$
$$= 1 - P(|M_n - E(Z)| > 1)$$

!

Or d'après l'inégalité de concentration :

$$P(|M_n - E(Z)| \geqslant 1) \leqslant \frac{V(Z)}{n \times 1^2} \quad \text{i.e.} \quad P(|M_n - E(Z)| \geqslant 1) \leqslant \frac{2{,}07}{n}$$

Or on a $P(|M_n - E(Z)| > 1) \leqslant P(|M_n - E(Z)| \geqslant 1)$ car $\underbrace{(|M_n - E(Z)| > 1) \subset (|M_n - E(Z)| \geqslant 1)}_{\text{événements}}$

Donc par transitivité, on a : $P(|M_n - E(Z)| > 1) \leqslant \frac{2{,}07}{n}$

$$\Leftrightarrow \quad -P(M_n - E(Z) > 1) \geqslant -\frac{2{,}07}{n}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - (P\ M_n - E(Z) > 1) \geqslant 1 - \frac{2{,}07}{n}$$
$$\Leftrightarrow \quad P(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3) \geqslant 1 - \frac{2{,}07}{n}$$

Par ailleurs, pour les valeurs trouvées en ⓑ, on a $n \geqslant 9$

Or $n \geqslant 9 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{-2{,}07}{n} \geqslant \frac{-2{,}07}{9} \Leftrightarrow 1 - \frac{2{,}07}{n} \geqslant 1 - \frac{2{,}07}{9}$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2{,}07}{n} \geqslant 0{,}77$$

Ainsi, par transitivité, on obtient bien :

$$\boxed{P(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3) \geqslant 0{,}75}$$

Rem : On propose page suivante une résolution avec l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev au lieu de l'inégalité de concentration.

Autre résolution pour ⓒ :

$$P(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3) = P(-1 \leqslant M_n - 7{,}3 \leqslant 1) = P\left(|M_n - E(M_n)| \leqslant 1\right)$$
$$= 1 - P\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right)$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev à M_n :

$$P\left(|M_n - E(M_n)| \geqslant 1\right) \leqslant \frac{V(M_n)}{1^2}$$

i.e. $$P\left(|M_n - E(M_n)| \geqslant 1\right) \leqslant \left(\sigma(M_n)\right)^2$$

On a : $$\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right) \subset \left(|M_n - E(M_n)| \geqslant 1\right)$$

D'où $$P\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right) \leqslant P\left(|M_n - E(M_n)| \geqslant 1\right)$$

Puis par transitivité : $$P\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right) \leqslant \left(\sigma(M_n)\right)^2$$

Pour les valeurs trouvées en ⓑ, on a $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}5$

$$\Rightarrow \left(\sigma(M_n)\right)^2 \leqslant 0{,}25$$

D'où par transitivité, $$P\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right) \leqslant 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad -P\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right) \geqslant -0{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - P\left(|M_n - E(M_n)| > 1\right) \geqslant 1 - 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{P(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3) \geqslant 0{,}75}$$

Ex4 :

$\boxed{\text{1) C}}$

Dans le R.O.N. $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs non colinéaires qui dirigent (ABG).

Puis $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal à (ABG) $\iff \begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AG}\end{cases} \iff \begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AG} = 0\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}a\times 1 + b\times 0 + c\times 0 = 0\\ a\times 1 + b\times 1 + c\times 1 = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a = 0\\ a+b+c = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a = 0\\ b = -c\end{cases}$$

Ainsi, tout vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ -\lambda\end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est normal à (ABG)

Parmi les propositions, seul le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ convient.

Rem : On pourrait également se contenter de tester chacun des vecteurs proposés :

Par exemple, pour la proposition a, on a $\vec{n_a}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases}\vec{n_a}.\overrightarrow{AB} = 1\times 1 + 1\times 0 + 1\times 0 = 1 \neq 0\\ \vec{n_a}.\overrightarrow{AG} = 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 = 3 \neq 0\end{cases}$ le vecteur $\vec{n_a}$ n'est orthogonal ni à $\overrightarrow{AB}$, ni à $\overrightarrow{AG}$ (et il faudrait qu'il soit orthogonal <u>aux deux</u>)

Pour la proposition c, on a $\vec{n_c}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases}\vec{n_c}.\overrightarrow{AB} = 0\times 1 + (-1)\times 0 + 1\times 0 = 0+0+0 = 0 & \text{d'où } \vec{n_c} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n_c}.\overrightarrow{AG} = 0\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0-1+1 = 0 & \text{d'où } \vec{n_c} \perp \overrightarrow{AG}\end{cases}$

2) A

Dans le triangle EAF, comme J est milieu de [EA] et I est milieu de [EF], on peut utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour démontrer que (IJ) // (AF).
Il s'agit ici du cas particulier appelé : "théorème de la droite des milieux".

Puis on a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$ car ABFEDCGH est un prisme droit

Donc $\begin{cases} (IJ) \parallel (AF) \\ (AF) \parallel (DG) \end{cases} \Rightarrow (IJ) \parallel (DG)$

Rem : On pourrait également déterminer les coordonnées des vecteurs directeurs de ces droites et tester leur colinéarité.

Dans le R.O.N., on a $J\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Puis I milieu de [EF] d'où $\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_E + x_F) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{1}{2}(y_E + y_F) = \frac{1}{2}(0+0) = 0 \\ z_I = \frac{1}{2}(z_E + z_F) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ Puis $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

On remarque facilement que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DG}$ donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont colinéaires.
De plus, la présence des 0 permet de voir sans calcul que $\overrightarrow{IJ}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{BD}$, ni à $\overrightarrow{AG}$, ni à $\overrightarrow{FG}$.

3) C

Par élimination, la base proposée réponse A ne possède que 2 vecteurs et ne peut donc pas générer l'espace entier. De même, les vecteurs de la réponse B sont coplanaires ($\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$) donc ne peuvent générer qu'un seul plan.
Pour la réponse D, on pourra remarquer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AJ} \underset{\text{car } \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{CG}}{=} \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CG}$,
donc les 3 vecteurs sont également coplanaires (l'un est combinaison linéaire des 2 autres).
Enfin, il est clair visuellement que $(DG) \not\subset (DAC)$ donc les 3 vecteurs sont non coplanaires et constituent une base de l'espace.

Rem : On pourrait également résoudre des systèmes pour tester la coplanarité (laissé au lecteur...)

$\boxed{4)\ B}$

On peut directement éliminer la réponse A car $\overrightarrow{AG} \neq \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$

La réponse B est correcte car la décomposition de $\overrightarrow{AG}$ est bonne et les 3 vecteurs forme la B.O.N. du R.O.N. proposé dans l'énoncé : $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) = (A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AJ})$

Puis on peut éliminer . la réponse C car $\widehat{ABJ} = 45° \neq 90°$

. la réponse D car $\widehat{DHG} = 45° \neq 90°$

$\boxed{5)\ C}$

$$\mathcal{V}_{ABFEDCGH} = \mathcal{A}_{ABFE} \times AD$$

$$= \left(\frac{EA+BF}{2} \times AB\right) \times AD$$

$$= \frac{2+1}{2} \times 1 \times 1$$

$$= \frac{3}{2} \text{ u.v.}$$

$\mathcal{A}_{\text{prisme droit}} = \dfrac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur}$

Rem : On pouvait aussi décomposer le prisme en
- un triangle rectangle EJF
- +
- un carré ABFJ

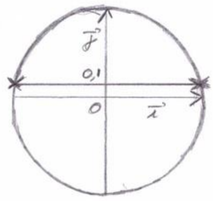
D'où
$$\mathcal{A}_{ABFE} = \mathcal{A}_{EJF} + \mathcal{A}_{ABFJ}$$
$$= \frac{1}{2}(EJ \times JF) + AB^2$$
$$= \frac{1}{2}(1\times 1) + 1^2$$
$$= \frac{1}{2} + 1$$
$$= \frac{3}{2} \text{ u.a.}$$

Puis $\mathcal{V}_{ABFEDCGH} = \mathcal{A}_{ABFE} \times AD = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ u.v.

Ex 5 :

$\boxed{1)\ C}$

Il suffit de tracer le cercle trigonométrique pour visualiser immédiatement les 2 solutions sur $[0 ; 2\pi]$



$\boxed{2)\ B}$

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0 ; \pi]$

D'où $\forall x \in [0 ; \pi]$, $f'(x) = 1 + \cos x$ puis $f''(x) = -\sin x$

Or $\forall x \in [0 ; \pi]$, $\sin x \geqslant 0 \Rightarrow -\sin x \leqslant 0 \Rightarrow f''(x) \leqslant 0$

Ainsi, f est concave sur $[0 ; \pi]$

$\boxed{3)\ D}$

Il n'y a ni ordre ni remise.

On tire successivement 3 boules parmi 50, il s'agit donc d'une combinaison de 3 parmi 50 : $\binom{50}{3} = \dfrac{50!}{3!\,(50-3)!} = \dfrac{50 \times 49 \times 48 \times \cancel{47!}}{1 \times 2 \times 3 \times \cancel{47!}}$

$\boxed{4)\ B}$

L'ordre est important et il y a remise.

Il s'agit donc d'une liste de $k = 10$ éléments prélevés dans un ensemble de $n = 2$ éléments.

Le nombre de listes possibles est donc : $n^k = 2^{10} = 1024$

$\boxed{5)\ D}$

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de "pile" obtenu.

On répète n fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "obtenir pile" est $p = \frac{1}{2}$.

D'où $X \sim \mathcal{B}\left(n ; \frac{1}{2}\right)$

On cherche $P(X \leqslant 2)$ que l'on ne peut pas calculer directement

$$\begin{cases} P(X=0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ P(X=1) = \binom{n}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ P(X=2) = \binom{n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

Puis
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \end{aligned}$$

Ex 6 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \quad$ et $\quad u_0 = 1$

$\boxed{\text{1) VRAIE}}$

$$u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2\times 1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1+2u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{1}{5}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+2u_2} = \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{7} = \frac{1}{7}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{1+2u_3} = \frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{1}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{9} = \frac{1}{9}$$

$\boxed{\text{2) VRAIE}}$

D'après les résultats de la question 1), on peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{1}{2n+1}$

Démontrons par récurrence cette propriété que nous noterons $\mathcal{P}(n)$:

Initialisation : Pour $n = 0$, $\dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2\times 0+1} = \dfrac{1}{1} = 1 = u_0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{1}{2n+3}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \overset{HR}{=} \frac{\frac{1}{2n+1}}{1+2\times\frac{1}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{1}{2n+3} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{1}{2n+1}$

3) $\boxed{\text{FAUSSE}}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 2n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+ \end{cases}$ $\Rightarrow$ Donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Or une suite qui tend vers 0 ne peut pas être minorée par un nombre strictement positif, en particulier par 10^{-10}.

Donc l'affirmation est fausse.

Ex7:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x + k e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$

1) ⓐ $f_{0,5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{0,5}(x) = 1 + 0{,}5 \times (-e^{-x}) = \boxed{1 - 0{,}5e^{-x}}$

ⓑ Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'_{0,5}(x) \geqslant 0 \iff 1 - 0{,}5e^{-x} \geqslant 0$

$\iff 0{,}5e^{-x} \leqslant 1$

$\iff e^{-x} \leqslant 2$

$\iff -x \leqslant \ln 2$

$\iff x \geqslant -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'_{0,5}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{0,5}(x)$		$\searrow$	$f_{0,5}(-\ln 2)$	$\nearrow$	

$f'_{0,5}$ s'annule et change de signe ($-$ vers $+$) en $x = -\ln 2$, donc

$\boxed{f_{0,5} \text{ admet un minimum en } -\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(0{,}5)}$

2) $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(\ln k) = \ln k + k . e^{-\ln k}$

$= \ln k + k . e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$

$= \ln k + k \times \frac{1}{k}$

$= \boxed{\ln k + 1}$

3) VRAIE

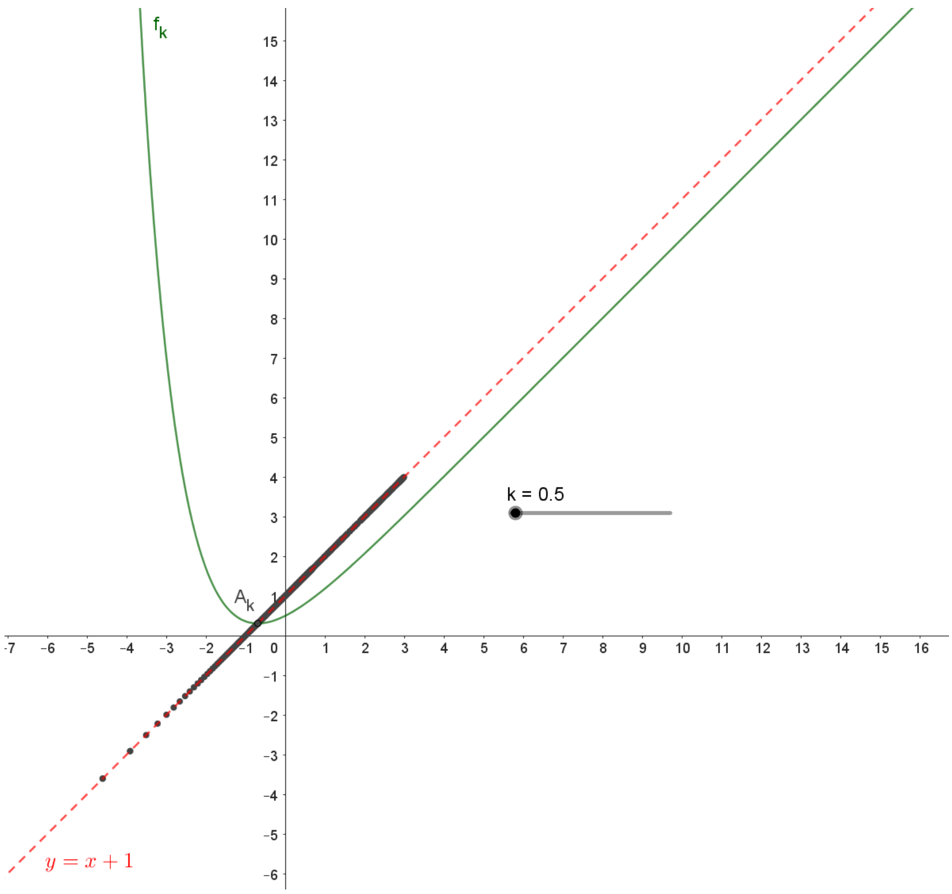
$\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, $A_k\begin{pmatrix} \ln k \\ 1+\ln k \end{pmatrix}$

Or lorsque k décrit $\mathbb{R}_+^*$, $\ln k$ décrit $\mathbb{R}$

Ainsi, en posant $x = \ln k$, on a $\begin{pmatrix} \ln k \\ 1+\ln k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1+x \end{pmatrix}$

D'où $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, les points A_k décrivent la droite d'équation $y = x+1$

Ceci implique 3 points A_k différents sont nécessairement alignés puisqu'ils appartiennent à la même droite.



Ex 8 :

$\boxed{\text{1) FAUSSE}}$

"liste (6)" renvoie la liste des 6 premières valeurs de u_n, i.e. u_0 à u_5.

On a : $u_0 = 0$

$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1$

$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$

$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$

$u_4 = 3u_3 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$

$u_5 = 3u_4 + 1 = 3 \times 40 + 1 = 121$

"liste (6)" renvoie donc $[0, 1, 4, 13, 40, 121]$, et non $[0, 1, 4, 13, 42, 121]$

$\boxed{\text{2) VRAIE}}$

Testons l'affirmation pour quelques valeurs de n :

Pour $n = 0$, $\frac{1}{2} \times 3^0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = 0 = u_0$

Pour $n = 1$, $\frac{1}{2} \times 3^1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 = u_1$

Pour $n = 2$, $\frac{1}{2} \times 3^2 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 = u_2$

Il <u>semble</u> donc que l'affirmation soit vraie.

Démontrons donc par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

Initialisation : pour $n = 0$, on a vu que $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ et mq $u_{n+1} = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$

$$u_{n+1} = 3u_n + 1 = 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

$\boxed{3) \text{ VRAIE}}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= 3^n - 1 + 1$$
$$= 3^n$$