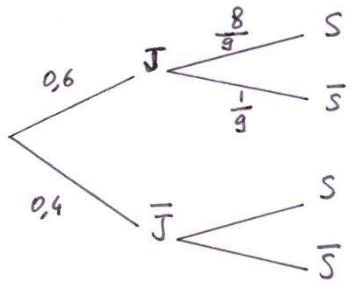
Ex 1 :

1)



$$P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S)$$

$$= 0,6 \times \frac{8}{9}$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{5} \times \frac{8}{\cancel{9}_{3}}$$

$$= \boxed{\frac{8}{15}}$$

2) ⓐ $\{J ; \bar{J}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la loi des probabilités totales,

$$P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S)$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{J} \cap S) = P(S) - P(J \cap S)$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15}$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{J} \cap S) = \frac{10}{15} - \frac{8}{15}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{15}}$$

ⓑ $$P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{2}{15}}{0,4} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{15}_{3}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3) ⓐ On répète $n = 30$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la personne déclare pratiquer une activité sportive régulière" est $p = P(S) = \frac{2}{3}$

D'où $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = \frac{2}{3}}$

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(30 ; \frac{2}{3}\right)}$$

b) $P(X=16) = \binom{30}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1-\frac{2}{3}\right)^{30-16} = \binom{30}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$

D'où $\boxed{P(X=16) \simeq 0,046}$ (à 10^{-3} près)

c) Le prix d'une place étant de 380 €, le budget de 10 000 € permet d'acheter $\frac{10\,000}{380} \simeq 26,3$ places.

Or le nombre de places est un entier naturel, donc on ne pourra pas acheter plus de 26 places.

Ainsi, le budget sera insuffisant si plus de 26 personnes sur l'échantillon de 30 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

Il faut donc calculer $P(X > 26)$:

$P(X>26) = 1 - P(X \leqslant 26)$

fonction de répartition de la calculatrice

$\simeq 1 - 0,997$

$\boxed{\simeq 0,003}$ (à 10^{-3} près)

Ex 2 :

$\boxed{1) \ B}$

La sol. générale de $y' = ay + b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est :

$$f(x) = \underbrace{\lambda e^{ax}}_{\substack{\text{sol. géné.} \\ \text{eq. diff.} \\ \text{homogène associée}}} + \underbrace{\frac{-b}{a}}_{\substack{\text{solution} \\ \text{particulière}}} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

ici, $(a;b) = (-3;7)$ donc $f(x) = \lambda e^{-3x} + \frac{7}{3}$

Puis $f(0) = 1 \iff \lambda e^{-3\times 0} + \frac{7}{3} = 1 \iff \lambda \times 1 = 1 - \frac{7}{3} \iff \lambda = \frac{-4}{3}$

D'où $f(x) = -\frac{4}{3} e^{-3x} + \frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ réponse B

$\boxed{2) \ C}$

f est continue et positive sur $[1;5]$

Donc $\int_1^5 f(x)\,dx$ correspond à l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$; $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

Le repère étant orthonormé, l'unité d'aire vaut $1 \times 1 = 1$

On voit qu'il y a 6 carreaux pleins à l'intérieur du domaine, donc son aire est minorée par $6 \times 1 = 6$. D'où $I > 6$

De plus, le domaine empiète sur 4 autres carreaux sans les remplir, donc son aire est majorée par $(6+4) \times 1 = 10$. D'où $I < 10$

Finalement, on a $6 < I < 10$ $\Rightarrow$ $5 \leqslant I \leqslant 10$ est la seule réponse qui convienne.

$\boxed{3)\ B}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 . \ln(x^2+4)$

D'où $\displaystyle\int_0^2 g'(x) . dx = \Big[g(x)\Big]_0^2 = g(2) - g(0) = 2^2 \times \ln(2^2+4) - 0^2 \times \ln(0^2+4)$

$= 4 \times \ln(8) - 0$

$= 4 \times \ln(2^3)$

$= 12 \ln 2 \quad \simeq 8{,}3$ (à 10^{-1} près)

$\boxed{4)\ D}$

L'ordre n'est pas important et la répétition est impossible, il s'agit donc d'une combinaison de 5 élèves parmi 31 : $\binom{31}{5}$

$\boxed{5)\ A}$

Il lui faut 3 élèves parmi les 20 SES, donc $\binom{20}{3}$

Puis elle doit choisir les 2 élèves restants parmi les 11 autres élèves (qui font soit PC, soit espagnol), donc $\binom{11}{2}$

On utilise le principe <u>multiplicatif</u> car il faut 3 élèves parmi 20 <u>et</u> 2 élèves parmi 11.

D'où le nombre de façons pour former ce groupe : $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$

Ex 3 :

1) Soit (u_n) : $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$

a) $u_1 = u_0 - \ln\left(\frac{u_0}{4}\right) = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln 2 \boxed{\simeq 7,31}$ (à 10^{-2} près)

$u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) = 8 - \ln(2) - \ln\left(\frac{8-\ln 2}{4}\right)$

$= 8 - \ln(2) - \left(\ln(8 - \ln 2) - \ln(4)\right)$

$= 8 - \ln(2) - \ln(8 - \ln 2) + 2\ln 2$

$= 8 + \ln(2) - \ln(8 - \ln 2)$

$\boxed{\simeq 6,70}$ (à 10^{-2} près)

⚠ Il faut bien reprendre la valeur <u>exacte</u> de u_1 pour le calcul de u_2.
Simon, on obtient $7,31 - \ln\left(\frac{7,31}{4}\right) \simeq 6,71$ (à 10^{-2} près)

b) range(k) correspond en langage naturel à $[\![0 ; k-1]\!]$

Ainsi, mystere(10) renvoie $\boxed{\text{la somme de } u_0 \text{ à } u_9}$, i.e la somme des 10 premiers termes de (u_n) : $\boxed{\sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_9}$

c) La moyenne étant la somme des termes divisée par le nombre de termes, il suffit de remplacer la dernière ligne du script par :

$\boxed{\text{return S/k}}$

```python
from math import log

def mystere(k):
    u=8
    S=0
    for i in range(k):
        S=S+u
        u=u-log(u/4)
    return S


def moyenne(k):
    u=8
    S=0
    for i in range(k):
        S=S+u
        u=u-log(u/4)
    return S/k
```

```
>>> mystere(10)
58.44045206721732
>>> moyenne(10)
5.8440452067217326
```

Comme il y a 10 termes, le programme modifié renvoie bien le dixième de la valeur donnée dans l'énoncé à la question 1.b)

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{x}{4}} = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, f' est du signe de $x-1$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\ln(4e)$	$\nearrow$	

$f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
$= 1 + \ln 4$
$= 1 + 2\ln 2$
$= \ln e + \ln 4$ (OU)
$= \ln(4e)$

3)

(a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 8$ et $u_1 = 8 - \ln 2 \simeq 7{,}3$ (cf 1))

Donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
et montrons que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

On a (HR) : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

$\Rightarrow f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$) f est croissante sur $[1 ; +\infty[$

$\Rightarrow 1 + 2\ln 2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

$\Rightarrow 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$) par transitivité car $1 \leqslant 1 + 2\ln 2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$

(b) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} \leqslant u_n & \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; 1 \leqslant u_n & \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée (par 1)} \end{cases}$

D'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 1$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \\ &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{4\}}$

(d) D'après 3.b), (u_n) converge vers $\ell \in [1; +\infty[$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $\mathbb{R}_+^*$

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'éq. $f(x) = x$

Or d'après 3.c), $f(x) = x \Leftrightarrow x = 4 \in [1; +\infty[$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4}$ i.e. $\boxed{\ell = 4}$

Ex4 :

1) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\17\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}$

Donc on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$

Les deux premières composantes de $\overrightarrow{AC}$ sont égales en valeur absolue, mais pas celles de $\overrightarrow{AB}$, donc $\forall k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AC} \neq k\overrightarrow{AB}$

(ou $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC} \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$\iff \begin{cases} 2 = 5k \\ -2 = -k \\ -10 = -13k \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ k = 2 \\ k = \frac{10}{13} \end{cases} \text{ incompatibles}$$
)

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$ et forment le plan (ABC)

2) a) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 5 + (-3)\times(-1) + 1\times(-13) = 10+3-13 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 2 + (-3)\times(-2) + 1\times(-10) = 4+6-10 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires qui dirigent le plan (ABC). $\boxed{\text{Donc } \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \text{ est normal à } (ABC)}$ avec $\mathcal{P} = (ABC)$

b) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\iff 2(x+1) + (-3)\times(y+1) + 1\times(z-17) = 0$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-17\end{pmatrix}$

$\iff 2x+2-3y-3+z-17 = 0$

$\iff \boxed{2x-3y+z-18 = 0}$

3) ⓐ On a $d : \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \text{ est vecteur directeur de } d}$

ⓑ $E \in \mathcal{P} \cap d \iff \begin{cases} 2x_E - 3y_E + z_E - 18 = 0 & E \in \mathcal{P} \\ x_E = 3t_E + 2 \\ y_E = t_E + 5 & E \in d \\ z_E = 4t_E + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2(3t_E+2) - 3(t_E+5) + (4t_E+1) - 18 = 0$$
$$\Rightarrow 6t_E + 4 - 3t_E - 15 + 4t_E + 1 - 18 = 0$$
$$\Rightarrow 7t_E - 28 = 0$$
$$\Rightarrow 7t_E = 28$$
$$\Rightarrow t_E = 4$$

D'où $\begin{cases} x_E = 3t_E + 2 = 3\times4+2 = 14 \\ y_E = t_E + 5 = 4+5 = 9 \\ z_E = 4t_E + 1 = 4\times4+1 = 17 \end{cases}$ Ainsi, $\boxed{\mathcal{P} \cap d = \left\{ E\begin{pmatrix}14\\9\\17\end{pmatrix} \right\}}$

4) On a $\begin{cases} \Delta \perp \mathcal{P} \\ F \in \Delta \cap \mathcal{P} \\ D \in \Delta \end{cases}$ donc F est le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$

Ainsi, $\text{dist}(D;\mathcal{P}) = DF = \|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{\overrightarrow{DF}^2}$ avec $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$

$$\iff \text{dist}(D;\mathcal{P}) = \sqrt{4^2+(-6)^2+2^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = \sqrt{4\times14}$$
$$= 2\sqrt{14} \text{ u.l.}$$

or 1 u.l = 100 m, donc $\boxed{\text{dist}(D;\mathcal{P}) = 2\sqrt{14}\times10^2 \text{ m}}$

5) $dist(\mathcal{D}; \mathcal{P})$ est la plus courte distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Pour parcourir cette distance de $2\sqrt{14} \times 10^2$ m à une vitesse de $18,6$ m.s^{-1},

il faut : $t = \dfrac{2\sqrt{14} \times 10^2}{18,6}$ ← distance [m] ← vitesse [m.s^{-1}]

temps [s]

vitesse = $\dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$

$\Leftrightarrow$ temps = $\dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$

$\simeq 40,23$ s > 40s

$\boxed{\text{Donc le drone ne pourra pas arriver à temps.}}$