Ex 1 :

Affirmation 1 : Fausse

Dans le R.O.N. $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{OA}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \times 5 + 0 \times 0 + 2 \times (-3) = 5 + 0 - 6 = -1 \neq 0$

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OC}$ qui dirige le plan (OAC), donc $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAC).

Affirmation 2 : Vraie

on a $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

et $(AB) : \begin{cases} x = -3\lambda + 2 \\ y = \lambda + 1 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires ($1^{\text{ères}}$ coordonnées différentes alors que les deux autres sont égales), donc $\mathcal{D}$ et (AB) ne sont ni strictement parallèles, ni confondues.

$\mathcal{D}$ et (AB) sont donc soit non coplanaires, soit sécantes (éventuellement en C).

Plusieurs possibilités ici :

→ on peut déterminer par résolution de système l'éventuelle intersection de $\mathcal{D}$ et (AB) pour s'assurer que l'on retrouve C.

→ on peut vérifier que $C \in \mathcal{D}$ et $C \in (AB)$ avec les systèmes

→ on peut vérifier que $C \in \mathcal{D}$ avec le système et que $C \in (AB)$ par colinéarité de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

* 1ère sol : Il faut s'assurer que les représentations paramétriques de $\mathcal{D}$ et $\overline{AB}$ utilisent des paramètres différents.

$$\mathcal{D} \cap (AB) \Rightarrow \begin{cases} -t+3 = -3\lambda+2 \\ t+2 = \lambda+1 \\ 2t+1 = 2\lambda-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3\lambda+1 \\ t = \lambda-1 \\ 2t = 2\lambda-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3\lambda+1 \\ t = \lambda-1 \\ t = \lambda-1 \end{cases}$$

← compatible donc il y a intersection

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3\lambda+1 \\ 3\lambda+1 = \lambda-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3\lambda+1 \\ 2\lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3\times(-1)+1 = -2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Puis $\mathcal{D} \cap (AB)$: $\begin{cases} x = -t+3 = -(-2)+3 = 5 = x_C \\ y = t+2 = -2+2 = 0 = y_C \\ z = 2t+1 = 2\times(-2)+1 = -3 = z_C \end{cases}$

* 2e sol :

$$\begin{cases} x_C = -t_C+3 \\ y_C = t_C+2 \\ z_C = 2t_C+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = -t_C+3 \\ 0 = t_C+2 \\ -3 = 2t_C+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_C = 3-5 = -2 \\ t_C = 0-2 = -2 \\ 2t_C = -3-1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_C = -2 \\ t_C = -2 \\ t_C = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow C \in \mathcal{D}$$

$$\begin{cases} x_C = -3\lambda_C+2 \\ y_C = \lambda_C+1 \\ z_C = 2\lambda_C-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = -3\lambda_C+2 \\ 0 = \lambda_C+1 \\ -3 = 2\lambda_C-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_C = 2-5 = -3 \\ \lambda_C = 0-1 = -1 \\ 2\lambda_C = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_C = \frac{-3}{3} = -1 \\ \lambda_C = -1 \\ \lambda_C = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow C \in (AB)$$

3e sol :

$C \in \mathcal{D}$: cf 2e sol.

Puis $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

$\Rightarrow A ; B$ et C sont alignés

$\Rightarrow C \in (AB)$

Affirmation 3 : Vraie

On extrait $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ à partir de l'éq. cartésienne proposée.

Par ailleurs, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$.

On a : $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1\times(-1) + 5\times 1 + (-2)\times 2 = -1+5-4 = 0$ donc $\vec{w} \perp \vec{u}$

Ainsi, $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$

Affirmation 4 : Vraie

Dans le R.O.N., on a $\vec{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Ainsi, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ dirige (BC) et est normal au plan $\mathcal{Q}$ médiateur de (BC)

D'où $\mathcal{Q}$ a une équation cartésienne de la forme : $3x + (-1)\times y + (-2)\times z + d = 0$

i.e. $3x - y - 2z + d = 0$

Notons I le milieu de $[BC]$:

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(-1+5) = \frac{1}{2}\times 4 = 2 \\ y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_C) = \frac{1}{2}(2+0) = \frac{1}{2}\times 2 = 1 \\ z_I = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = \frac{1}{2}(1+(-3)) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I \in \mathcal{Q} \iff 3x_I - y_I - 2z_I + d = 0 &\iff 3\times 2 - 1 - 2\times(-1) + d = 0 \\ &\iff 6 - 1 + 2 + d = 0 \\ &\iff 7 + d = 0 \\ &\iff d = -7 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{Q} : 3x - y - 2z - 7 = 0$

Ex 2 :

⇒ Partie A :

1) (E) : $y' + 0,02y = m$ avec $m \in \mathbb{R}$

La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière φ de (E) et de la solution générale de l'éq. homogène associée (E_h).

(E_h) : $y' + 0,02y = 0 \iff y' = -0,02y$

On a $t \mapsto k e^{-0,02t}$, $k \in \mathbb{R}$ sol. générale de (E_h).

Puis $\varphi : t \mapsto \frac{m}{0,02}$ est sol. part. de (E) car $\varphi'(t) + 0,02 \cdot \varphi(t) = 0 + 0,02 \times \frac{m}{0,02}$
$= m$

Par ailleurs, comme $\frac{1}{0,02} = \frac{1}{\frac{2}{100}} = \frac{100}{2} = 50$, on a $\varphi(t) = 50m$

Ainsi, la sol. générale de (E) est de la forme : $\boxed{t \mapsto k \cdot e^{-0,02t} + 50m \ , k \in \mathbb{R}}$

2) Soit $m \in \mathbb{R}$, on a ainsi $f(t) = k \cdot e^{-0,02t} + 50m$, $k \in \mathbb{R}$

On $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} -0,02t = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{cases}$ ⇒ Par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,02t} = 0$

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = k \times 0 + 50m$
$= 50m$

Ainsi, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 30 \iff 50m = 30 \iff m = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = \boxed{0,6}$

3) $f(0) = 210 \iff k \times e^{-0,02 \times 0} + 50 \times 0,6 = 210 \iff k \times 1 + 30 = 210 \iff k = 180$

D'où $\boxed{f(t) = 180 \cdot e^{-0,02t} + 30}$

$\Rightarrow$ Partie B :

sur $(O, \vec{\imath})$ sur $(O, \vec{\jmath})$

1) ⓐ On lit : $\boxed{T \simeq 110 \text{ s}}$ (antécédent de 50 par f)

ⓑ on veut $f(T) = 50 \iff 180\, e^{-0{,}02T} + 30 = 50$

$\iff 180\, e^{-0{,}02T} = 20$

$\iff e^{-0{,}02T} = \dfrac{2\cancel{0}}{18\cancel{0}}$

$\iff e^{-0{,}02T} = \dfrac{1}{9}$

$\iff -0{,}02T = \ln \dfrac{1}{9}$

$\iff 0{,}02T = \ln 9$

$\iff T = \dfrac{\ln 9}{0{,}02}$

$\iff \boxed{T = 50 . \ln 9}$ ($\simeq 109{,}86$ pour vérifier au brouillon)

2) $\mu = \dfrac{1}{100-0} \times \displaystyle\int_0^{100} f(t) . dt$

$= \dfrac{1}{100} \times \displaystyle\int_0^{100} \left(180\, e^{-0{,}02t} + 30\right) dt$

$= \dfrac{1}{100} \times \displaystyle\int_0^{100} \left(\dfrac{180}{-0{,}02} \times \left(-0{,}02 . e^{-0{,}02t}\right) + 30\right) dt$

$= \dfrac{1}{100} \times \left[-9000 . e^{-0{,}02t} + 30\, t\right]_0^{100}$

$= \dfrac{1}{100} . \left(-9000\, e^{-0{,}02\times 100} + 30 \times 100 - \left(-9000 . e^{-0{,}02\times 0} + 30 \times 0\right)\right)$

$= \dfrac{1}{100} . \left(-9000\, e^{-2} + 3000 + 9000\right)$

$= \boxed{120 - 90e^{-2}}$ ($\simeq 108\,°C$ qui est une valeur cohérente)

Ex 3 :

⇒ Partie A :

1) On répète $n = 3$ fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "on obtient Face" est égale à $p = \frac{1}{2}$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$

$X \sim \mathcal{B}\left(3 ; \frac{1}{2}\right)$.

2) Comme $p = \frac{1}{2}$, la distribution est symétrique.

$\forall k \in [\![0 ; 3]\!]$, $P(X=k) = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{k}$

D'où $\begin{cases} P(X=0) = \frac{1}{8} \times \binom{3}{0} = \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{8} \\ P(X=1) = \frac{1}{8} \times \binom{3}{1} = \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{8} \end{cases}$

Puis $\begin{cases} P(X=2) = P(X=1) = \frac{3}{8} \\ P(X=3) = P(X=0) = \frac{1}{8} \end{cases}$ ← par symétrie.

D'où la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Rem : Si vous aviez oublié que : $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ distribution symétrique ,

on trouvait par le calcul :

$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \times \binom{3}{3-2} = \frac{1}{8} \times \binom{3}{1} = P(X=1)$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \times \frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = P(X=0)$

⇒ Partie B :

1) $P_{A_1}(G)$ est la probabilité de gagner la partie, donc d'obtenir 3 "Face" sachant que A_1 est réalisé, i.e. sachant qu'une pièce est tombée sur "Face" lors du 1er lancer.

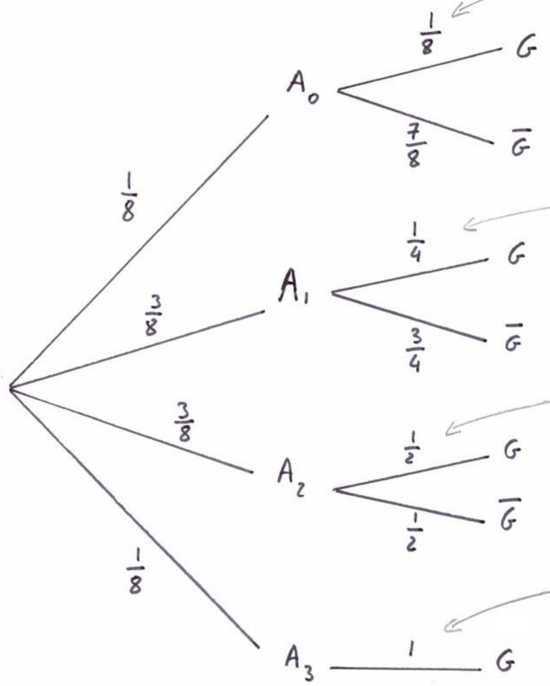
On conserve donc 1 pièce et on en relance 2.

Il y a ainsi **4 tirages équiprobables possibles** :
- Pile - Pile
- Pile - Face
- Face - Pile
- Face - Face

, dont seul le tirage "Face - Face" permet de réaliser G.

D'où $\boxed{P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}}$

2)



1 tirage favorable pour $2^3 = 8$ possibilités
PPP, PFP, PPF, PFF
FPP, FFP, FPF, $\boxed{\text{FFF}}$

cf question précédente

1 tirage favorable pour 2 possibilités
P ou $\boxed{\text{F}}$

La combinaison gagnante est sortie au 1er tirage.

3) $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements

D'après la loi des probabilités totales,

$$p = P(G) = P(A_0 \cap G) + P(A_1 \cap G) + P(A_2 \cap G) + P(A_3 \cap G)$$

$$\Leftrightarrow p = P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{64}(1 + 3\times 2 + 3\times 4 + 1\times 8)$$

$$= \frac{1}{64}(1+6+12+8)$$

$$= \boxed{\frac{27}{64}}$$

4) $$P_G(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{32}_{1}} \times \frac{\cancel{64}^{2}}{\cancel{27}_{9}} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et désormais $Y \sim \mathcal{B}\left(n ; \frac{27}{64}\right)$ avec Y la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées.

On veut $P(Y \geqslant 1) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(Y=0) > 0,95 \Leftrightarrow P(Y=0) < 0,05$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1 - \frac{27}{64}\right)^{n-0} < 0,05 \Leftrightarrow 1 \times 1 \times \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0,05$$

$$\underset{\text{stricte croissance de } \ln}{\Leftrightarrow} \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) < \ln 0,05 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln 0,05 \underset{\ln\left(\frac{37}{64}\right) < 0}{\Leftrightarrow} n > \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)}$$

Or $\frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \simeq 5,5$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc il faut jouer $\boxed{\text{au moins 6 fois}}$.

Ex 4 :

⇒ Partie A :

1) "range(n)" signifie que l'on travaille dans l'intervalle $[\![0 ; n-1]\!]$,

contenant $(n-1)-0+1 = n$ éléments.

Ainsi, on écrit dans le script :

```
def suite(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5-u)
    return u
```

u_0

relation de récurrence

$u_{n+1} = \dfrac{4}{5-u_n}$

2) suite(2) renvoie la valeur de u_2.

On a : $u_1 = \dfrac{4}{5-u_0} = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$

Puis $u_2 = \dfrac{4}{5-u_1} = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{1}{3}$ $\boxed{\simeq 1,3333\ldots}$

3) Il s'agit des valeurs de u_2, u_5, u_{10}, u_{20}

$\boxed{\text{Il semble que } (u_n) \text{ soit strictement décroissante et tende vers } 1}$

ou "converge"

⇒ Partie B : $\forall x \in]-\infty ; 5[\,,\ f(x) = \dfrac{4}{5-x}$

et $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) f est dérivable sur $]-\infty ; 5[$ d'après l'énoncé

$\forall x \in]-\infty ; 5[\,,\ f'(x) = 4 \times \dfrac{-(-1)}{(5-x)^2} = \dfrac{4}{(5-x)^2} > 0$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; 5[}$

2) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$

Donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

et montrons que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

D'après HR : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

$\Rightarrow f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$ par croissance de f sur $[1;4]$

$\Rightarrow \dfrac{4}{5-1} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{4}{5-4}$

$\Rightarrow 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4}$

3) a) Soit $x \in]-\infty ; 5[$,

$f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x$

$\iff 4 = x(5-x)$ et $5-x \neq 0$

$\iff 4 = 5x - x^2$ et $x \neq 5$) car $x \in]-\infty ; 5[$

$\iff \boxed{x^2 - 5x + 4 = 0}$

b) Etudions le polynôme :

$x_1 = 1$ est racine évidente car la somme des coefficients est nulle.

Puis $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{4}{1} \iff 1 \times x_2 = 4 \iff x_2 = 4$

On a $x_1 \in]-\infty ; 5[$ et $x_2 \in]-\infty ; 5[$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1 ; 4\}}$

4) D'après la question 2 :

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1 \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée} \end{cases}$

D'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geqslant 1$ (et même $1 \leqslant l \leqslant 4$)

Puis f est continue (car dérivable) sur $]-\infty ; 5[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Donc d'après le théorème du point fixe, comme (u_n) converge, sa limite l est solution de l'équation $f(l) = l$. D'après la question 3.b, la limite est soit 1, soit 4. Or $u_0 = 3$ et (u_n) est décroissante, donc la limite ne peut pas être $4 > u_0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

5) Calculons les premiers termes de (u_n) avec $u_0 = 4$

On a $u_1 = f(u_0) = f(4) = \frac{4}{5-4} = \frac{4}{1} = 4 = u_0$

Puis $u_2 = f(u_1) = f(u_0) = 4 = u_0$

$\vdots$

On constate ainsi que la suite est constante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4$

Donc (u_n) converge vers 4.

Ainsi, $\boxed{\text{le comportement de } (u_n) \text{ serait différent si } u_0 = 4}$

Rem : Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait démontrer le caractère constant de (u_n) par récurrence, car nous avons en réalité émis une conjecture. Voici une ébauche de démonstration.

Démontrons $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4$

Initialisation : $u_0 = 4 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n = 4$

D'où $u_{n+1} = f(u_n) = f(4) = \frac{4}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie