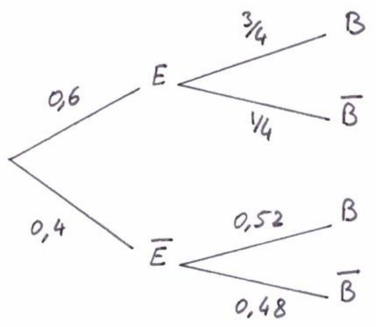
Ex 1 :

1)



$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,6 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20} = \boxed{0,45}$$

2) $\{E ; \overline{E}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(E \cap B) + P(\overline{E} \cap B)$$
$$= 0,45 + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B)$$
$$= 0,45 + 0,4 \times 0,52$$
$$= 0,45 + 0,208$$
$$= \boxed{0,658}$$

3) $P_B(E) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,45}{0,658} = \dfrac{450}{658} = \dfrac{225}{329} \boxed{\simeq 0,684}$ (à 10^{-3} près)

4) ⓐ On répète $n = 20$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile " est égale à $p = P(B) = 0,658$

Ainsi, $\boxed{\text{X suit la loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0,658.}$

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(20 ; 0,658)}$$

b) $P(X=8) = \binom{20}{8} \times 0{,}658^{8} \times (1-0{,}658)^{20-8}$ $\boxed{\simeq 0{,}011}$ (à 10^{-3} près)

c) $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10)$

$= 1 - P(X \leqslant 9)$ On utilise la fonction de répartition de la calculatrice

$\simeq 1 - 0{,}045$

$\boxed{\simeq 0{,}955}$ (à 10^{-3} près)

d) Comme $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}658)$, on a :

$E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}658 = \boxed{13{,}16}$

e) Pour la vente de 20 véhicules, la directrice doit prévoir d'engager en moyenne : $E(X) \times$ Prix de l'installation $= 13{,}16 \times 1200 = \boxed{15\,792\ €}$

Ex 2 :

$\boxed{\text{1.A) VRAIE}}$

La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Puis $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Les deux limites et les variations de f sont donc correctes dans le tableau.

Rem : Pour les variations de f, on pouvait également se passer de la dérivée en disant que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions de référence strictement croissantes sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{1.B) FAUSSE}}$

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(I) = \mathbb{R}$

Or $-2 \in f(I)$, donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\exists!\, x \in I$, $f(x) = -2$ i.e. l'éq. $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{2.C) VRAIE}}$

Il faut lever l'indétermination du numérateur en transformant l'expression :

$$\forall x > 0, \quad \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{\ln x}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^2}$$

Or on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (théorème des croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0 = 0 - \frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{3.D) FAUSSE}}$

Toute fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ admet des primitives sur I.

Ainsi, il existe des primitives K de la fonction k sur $\mathbb{R}$ car k est continue sur $\mathbb{R}$.

Par contre, K décroissante sur $\mathbb{R}$ implique que k soit négative sur $\mathbb{R}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \times e^{-x^2+1} > 0$

$\Rightarrow \quad 1 + 2e^{-x^2+1} > 1 > 0$

$\Rightarrow \quad k(x) > 0$

Ainsi, toutes les primitives K de k sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{4.E) VRAIE}}$

La fonction $x \longmapsto e^{-\frac{1}{3}x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Puis par opérations sur la dérivation, $g : x \longmapsto 4e^{-\frac{1}{3}x}+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 4 \times \frac{-1}{3} \times e^{-\frac{1}{3}x} + 0 = -\frac{4}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 3g'(x) + g(x) = \cancel{3} \times \frac{-4}{\cancel{3}} \cdot e^{-\frac{1}{3}x} + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$

$= \cancel{-4 \cdot e^{-\frac{1}{3}x}} + \cancel{4 \cdot e^{-\frac{1}{3}x}} + 1$

$= 1$

Donc g est solution de (E).

Puis $g(0) = 4 \times e^{-\frac{1}{3}\times 0} + 1 = 4 \times e^{0} + 1 = 4 \times 1 + 1 = 4 + 1 = 5$

$\boxed{\text{5.F) VRAIE}}$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

u et v sont continûment dérivables sur $[0;1]$

Puis par IPP : $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx = \left[x \times (-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x})\,dx$

$= -1 \times e^{-1} - 0 \times (-e^{-0}) - \left[e^{-x}\right]_0^1$

$= -e^{-1} + 0 - \left(e^{-1} - e^{-0}\right)$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 1$

$= 1 - 2e^{-1}$

Ex 3 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2$

1) Le 1er étage comporte $u_1 = 1^2 = 1$ boule

le 2e étage comporte $u_2 = 2^2 = 4$ boules

Le 3e étage comporte $u_3 = 3^2 = 9$ boules

Le 4e étage comporte $u_4 = 4^2 = 16$ boules

Il y a donc au total : $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = \boxed{30 \text{ boules}}$

2) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{5} u_k = u_5 + \sum_{k=1}^{4} u_k = 5^2 + 30 = 25 + 30 = \boxed{55}$$

Interprétation : $\boxed{\text{Une pyramide de 5 étages comporte 55 boules au total.}}$

ⓑ

```
def pyramide(n):
    S = 0
    for i in range(1, n+1):
        S = S + i*i
    return S
```

⚠ La borne supérieure est toujours ouverte avec l'instruction "range" en Python

on peut remplacer "i*i" ($i \times i$) par "i**2" (i^2)

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

A ce stade, deux solutions s'offrent à nous :

* 1ère solution : développer le second membre de l'égalité à démontrer pour obtenir également : $\dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

* 2e solution : étudier le polynôme $2n^2+7n+6$

$$\Delta = 7^2 - 4\times 2\times 6 = 49 - 8\times 6 = 49 - 48 = 1$$

Puis
$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{-7-\sqrt{1}}{2\times 2} = \dfrac{-7-1}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \\[2mm] n_2 = \dfrac{-7+\sqrt{1}}{2\times 2} = \dfrac{-7+1}{4} = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

D'où $2n^2+7n+6 = 2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)$

$$= (n+2)(2n+3)$$

$$= (n+2)(2n+2+1)$$

$$= (n+2)(2(n+1)+1)$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}}$

d) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : Pour $n=1$, on a $S_1 = u_1 = 1^2 = 1$

et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = \dfrac{1\times2\times3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

et montrons que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$\Leftrightarrow S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ en utilisant HR

$\Leftrightarrow S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ d'après la question 2.c)

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tq $S_n \leqslant 200$, n étant le plus grand possible.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \Leftrightarrow S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0 \Rightarrow (S_n)$ strict. croissante

Puis $S_7 = \dfrac{7\times(7+1)\times(2\times7+1)}{6} = \dfrac{7\times8\times15}{6} = \dfrac{7\times4\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}} = 140 < 200$

Et $S_8 = \dfrac{8\times(8+1)\times(2\times8+1)}{6} = \dfrac{8\times9\times17}{6} = \dfrac{4\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times3\times17}{\cancel{2}\times\cancel{3}} = 12\times17 = 204 > 200$

La plus grande pyramide qu'il pourra construire aura $\boxed{n = 7 \text{ étages.}}$

Il utilisera ainsi $\boxed{S_7 = 140 \text{ oranges}}$ pour la construire.

Ex 4 :

1) Dans le R.O.N. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $\boxed{E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$

2) a) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, et on a $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB} = 0\times1+0\times(-1)+1\times0 = 0+0+0=0 & \text{donc } \overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DB} = 1\times1+1\times(-1)+1\times0 = 1-1+0=0 & \text{donc } \overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AG} \end{cases}$

On a $\overrightarrow{DB}$ orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG}$, non colinéaires (car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AG} \neq \lambda\overrightarrow{AE}$), qui dirigent le plan (GEA).

Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ est normal au plan } (GEA).}$

b) Comme $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA), ce plan admet une équation cartésienne de la forme $1\times x+(-1)\times y+0\times z+d=0$

coordonnées de $\overrightarrow{DB}$

i.e. $x-y+d=0$

Or $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in (GEA)$ donc $x_A - y_A + d = 0 \iff 0-0+d=0 \iff d=0$

D'où (GEA) : $\boxed{x-y=0}$ ou $x=y$

OU $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (GEA) \iff \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$\iff 1\times(x-x_A)+(-1)\times(y-y_A)+0\times(z-z_A)=0$

$\iff (x-0)-(y-0)+0=0$

$\iff \boxed{x-y=0}$

3) ⓐ Soit $m \in [0;1]$

On a donc dans le R.O.N. : $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}m\\0\\0\end{pmatrix}$; $L\begin{pmatrix}1-m\\1\\1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}x_K-x_C\\y_K-y_C\\z_K-z_C\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}m-1\\0-1\\0-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}m-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}x_E-x_L\\y_E-y_L\\z_E-z_L\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}0-(1-m)\\0-1\\1-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}m-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\forall m \in [0;1]$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{LE}$ donc $\boxed{\text{CKEL est un parallélogramme.}}$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\-1\end{pmatrix}$

Puis $\forall m \in [0;1]$, $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE} = (1-m)\times(-m) + 1\times 0 + 0\times(-1)$

$= m(m-1) + 0 + 0$

$= \boxed{m(m-1)}$

ⓒ On sait que CKEL est un parallélogramme

Donc CKEL est un rectangle $\Leftrightarrow$ CKEL possède un angle droit

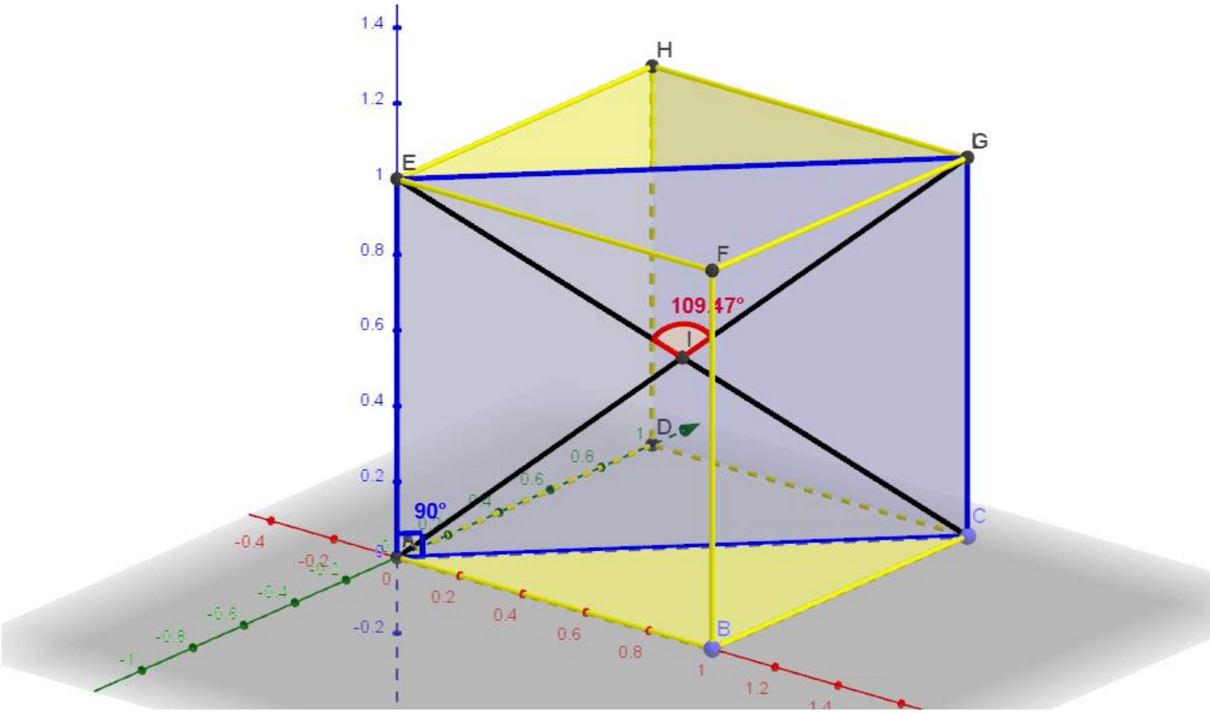
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{KC};\overrightarrow{KE})$ est droit

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE} = 0$

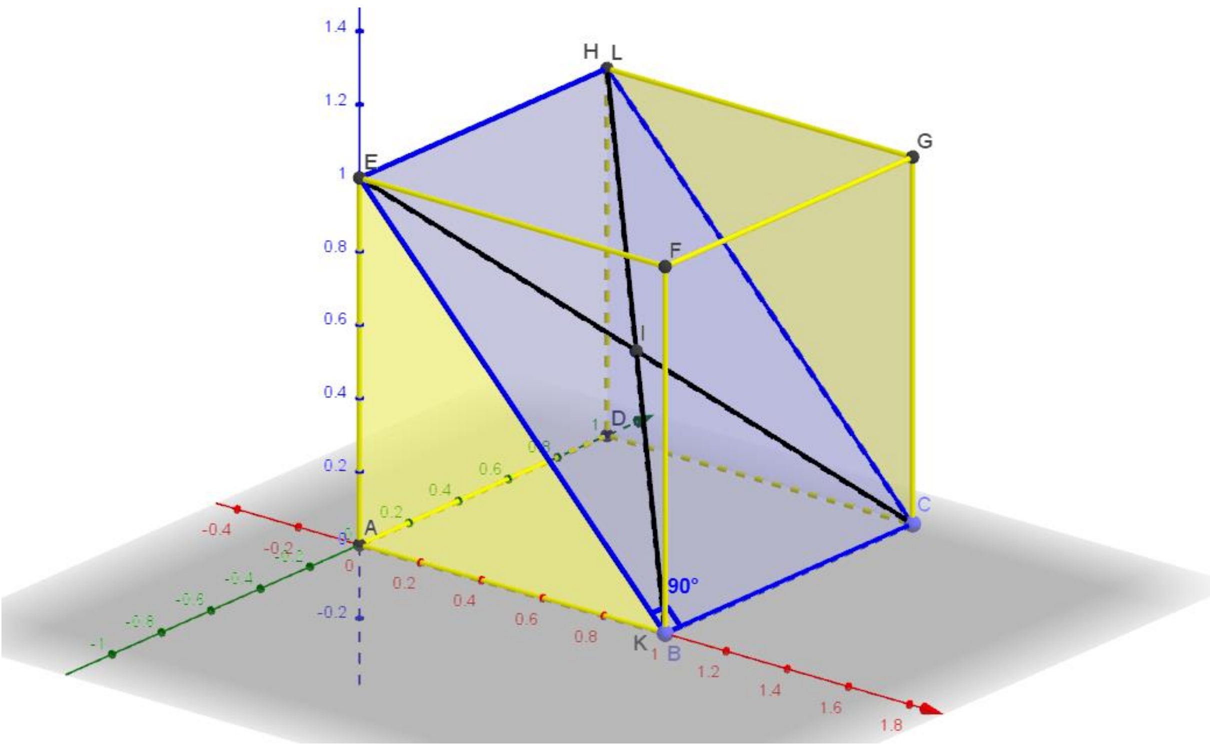
$\Leftrightarrow m(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ ou $m-1 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{m = 0 \text{ ou } m = 1}$



Cas $m = 0$



Cas $m = 1$

4) ⓐ $m = \frac{1}{2}$ donc $L\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On sait que CKEL est un parallélogramme

Donc CKEL est un losange $\Leftrightarrow$ CKEL possède 2 côtés consécutifs de même longueur.

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis $KC = \|\overrightarrow{KC}\| = \sqrt{\overrightarrow{KC}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ u.l.

et $KE = \|\overrightarrow{KE}\| = \sqrt{\overrightarrow{KE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+0+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ u.l.

On a $\begin{cases} KC = KE \\ \text{CKEL est un parallélogramme} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{CKEL est un losange}}$

Rem: Comme CKEL est un parallélogramme, on pouvait également prouver que ses diagonales sont perpendiculaires, i.e. $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{LK} = 0$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{LK} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0 - 1 + 1 = 0$

ⓑ D'après 3.b, comme $m = \frac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} = \frac{-1}{4}$

Puis $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \|\overrightarrow{KC}\| \times \|\overrightarrow{KE}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{KC};\overrightarrow{KE}}\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = KC \times KE \times \cos \widehat{CKE}$

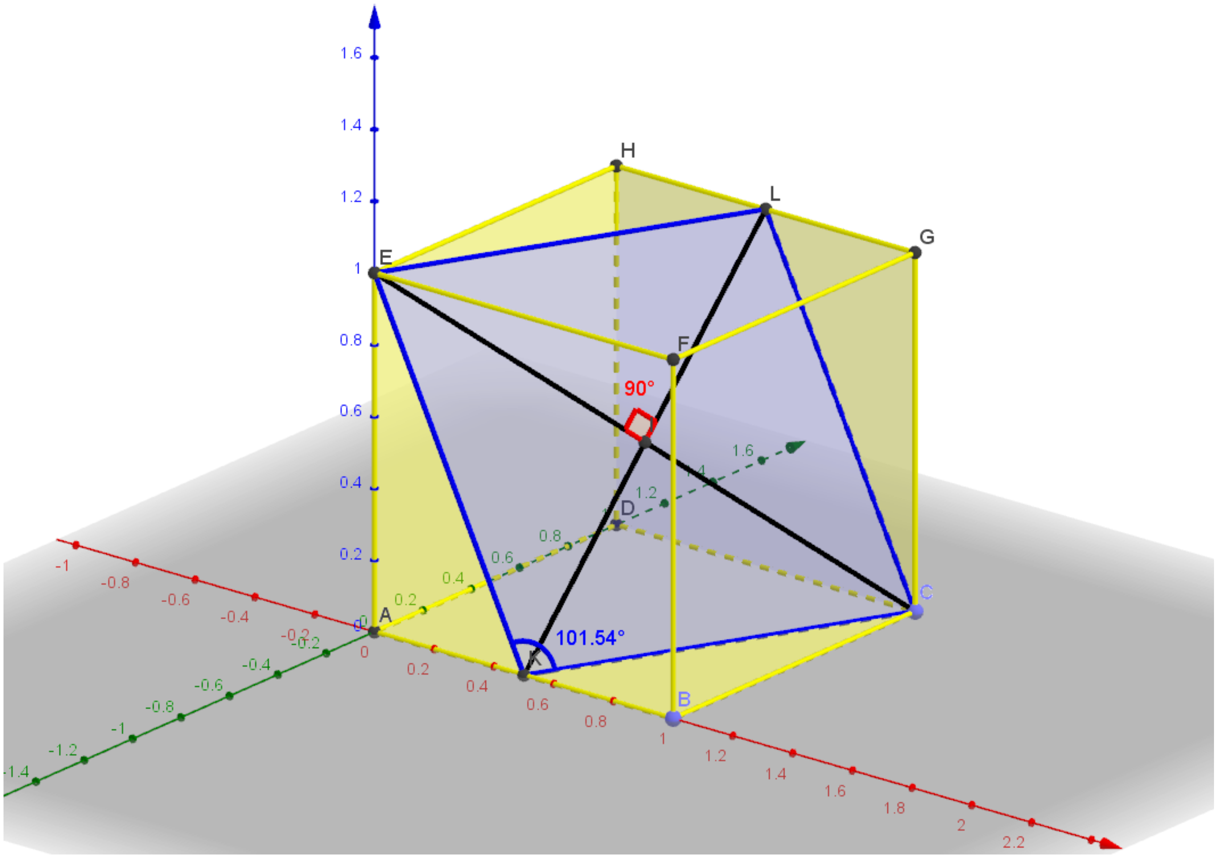
$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos \widehat{CKE}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \cos \widehat{CKE}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{CKE} = \frac{-1}{5}$

⚠ Calculatrice en mode "degrés"

D'où $\widehat{CKE} = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{5}\right) \boxed{\simeq 102°}$ (au degré près)



Cas $m = 0{,}5$