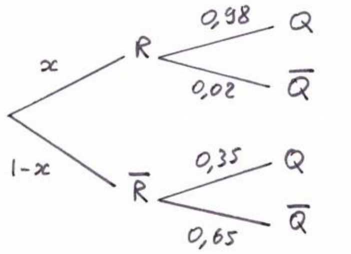
Ex 1 :

1) D'après l'énoncé, $P(Q) = 0,917$ et $P_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 0,65$

2) a)



b) $\{R ; \overline{R}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$P(Q) = P(R \cap Q) + P(\overline{R} \cap Q)$

$\Leftrightarrow P(Q) = P(R) \times P_R(Q) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(Q)$

$\Leftrightarrow 0,917 = x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35$

$\Leftrightarrow 0,917 = 0,98x - 0,35x + 0,35$

$\Leftrightarrow 0,63x = 0,567$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{0,567}{0,63}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 0,9}$

3) $P_Q(R) = \dfrac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{P(R) \times P_R(Q)}{P(Q)} = \underbrace{\dfrac{0,9 \times 0,98}{0,917}}_{\boxed{= \frac{126}{131}}} \boxed{\simeq 0,962}$ (à 10^{-3} près)

4) $N \sim \mathcal{B}(20 ; 0,615)$

On cherche $\underbrace{k}_{\text{le plus grand}} \in [\![0 ; 20]\!]$ tq $P(X \geqslant k) \geqslant 0,65$

$\Leftrightarrow 1 - P(X < k) \geqslant 0,65$

$\Leftrightarrow P(X \leqslant k-1) \leqslant 0,35$

En utilisant la fct de répartition (strict. croissante) de la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 10) < 0,35$ et $P(X \leqslant 11) > 0,35$ donc il faut $k - 1 = 10 \Leftrightarrow \boxed{k = 11}$

En effet, on a bien $P(X \geqslant 11) \simeq 0,80 \geqslant 0,65$ et $P(X \geqslant 12) \simeq 0,64868 < 0,65$

5) $E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{10} N_k\right) = \sum_{k=1}^{10} E(N_k) = 10 \times E(N_1) = 10 \times m \times p = 10 \times 20 \times 0{,}615$

linéarité de l'espérance

les N_k suivent la même loi

loi binomiale

D'où $\boxed{E(S) = 123}$

Par ailleurs, les variables aléatoires N_k sont indépendantes,

donc $V(S) = V\left(\sum_{k=1}^{10} N_k\right) = \sum_{k=1}^{10} V(N_k) = 10 \times V(N_1) = 10 \times m \times p \times (1-p) = 123 \times 0{,}385$

indépendance

D'où $\boxed{V(S) = 47{,}355}$

6) (a) Soit $M = \frac{1}{10} \times S$

M est la variable aléatoire "moyenne" qui modélise la note moyenne sur 20 obtenue à l'examen par les 10 étudiants interrogés.

(b) Par linéarité de l'espérance, on a :

$E(M) = E\left(\frac{1}{10} \times S\right) = \frac{1}{10} \times E(S) = \frac{1}{10} \times 123 = \boxed{12{,}3}$

Puis $V(M) = V\left(\frac{1}{10} \times S\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot V(S) = \frac{1}{100} \times 47{,}355 = \boxed{0{,}47355}$

(c) $P\left(M \in]10{,}3\,;\,14{,}3[\right) = P\left(10{,}3 < M < 14{,}3\right) = P\left(-2 < M - 12{,}3 < 2\right) = P\left(|M - E(M)| < 2\right)$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(|M - E(M)| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{V(M)}{2^2} \iff -P\left(|M - E(M)| \geqslant 2\right) \geqslant \frac{-0{,}47355}{4}$

$\iff 1 - P\left(|M - E(M)| \geqslant 2\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}47355}{4}$

$\iff P\left(M \in]10{,}3\,;\,14{,}3[\right) \geqslant 0{,}88161 25 \quad \boxed{\geqslant 0{,}8}$

Ex 2 :

⇒ Partie A :

1) Ajouter $15\,g = 15\,000\,mg$ dans un volume d'eau de $50\,m^3 = 50\,000\,L$

fait augmenter le taux de : $\dfrac{\overset{[mg]}{15\,000}}{\underset{[L]}{50\,000}} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = \boxed{0,3\ mg.L^{-1}}$

2) (a) Montrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0,7$

Puis $v_1 = 0,92.v_0 + 0,3 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$

On a bien $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$

et montrons que $v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4$

(HR) : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4 \Rightarrow 0,92.v_n \leqslant 0,92.v_{n+1} \leqslant 0,92 \times 4$

$\Rightarrow 0,92.v_n + 0,3 \leqslant 0,92.v_{n+1} + 0,3 \leqslant 3,68 + 0,3$

$\Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3,98 \leqslant 4$ par transitivité

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4}$

(b) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_{n+1} & \Rightarrow (v_n) \text{ croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 4 & \Rightarrow (v_n) \text{ majorée par } 4 \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 4$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ avec g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0{,}92x + 0{,}3$

g est affine donc continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème du point fixe, comme (v_n) converge, sa limite ℓ est solution de

$g(\ell) = \ell \iff 0{,}92\,\ell + 0{,}3 = \ell \iff 0{,}08\,\ell = 0{,}3 \iff \ell = \frac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3{,}75}$

3) A long terme, la piscine d'Alain aura un taux de chlore de $3{,}75 \text{ mg.L}^{-1}$ alors que les piscinistes recommandent un taux compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Comme $3{,}75 \notin [1;3]$, $\boxed{\text{le taux de chlore ne sera pas conforme aux préconisations.}}$

4) Il faut que la boucle "while" tourne tant que la condition $v_n > s$ n'est pas atteinte, i.e. tant que $v_n \leqslant s$.

```
def alerte_chlore(s):
    n = 0
    v = 0.7
    while v <= s :
        n = n+1
        v = 0.92 * v + 0.3
    return n
```

5) On obtient la valeur $\boxed{n = 17}$

Interprétation : Le taux de chlore ne sera plus conforme aux préconisations à partir du 17$^{\text{ème}}$ jour.

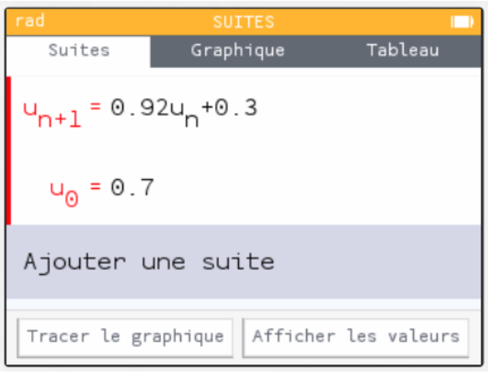
Il y avait deux possibilités pour répondre à cette question.

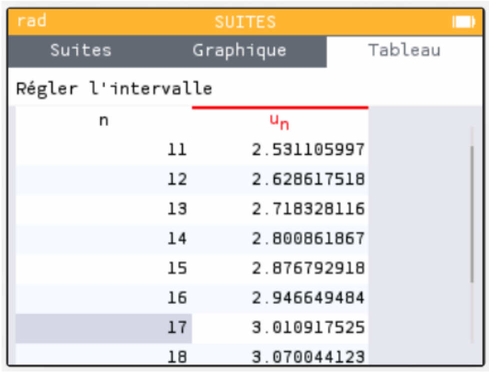
➔ On pouvait saisir le script Python et le lancer dans la calculatrice :

```
def alerte_chlore(s):
    n=0
    v=0.7
    while v<=s:
        n=n+1
        v=0.92*v+0.3
    return n
```

```
>>> alerte_chlore(3)
17
```

➔ On pouvait saisir la suite dans le menu adapté de la calculatrice puis lire dans le tableau pour quelle valeur de n un terme de la suite dépasse 17 :





⇒ Partie B : (E) : $y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$ avec $q \geqslant 0$

1) L'éq. diff homogène associée à (E) est : $y' = -0{,}08y$.

Elle a pour solution les fonctions de la forme $x \longmapsto C.e^{-0{,}08x}$, $C \in \mathbb{R}$

De plus, la fonction constante $x \longmapsto \frac{9}{4}$ est sol. particulière de (E)

car $-0{,}08 \times \frac{9}{4} + \frac{9}{50} = \frac{-\cancel{2}}{25} \times \frac{9}{\cancel{4}_{2}} + \frac{9}{50} = 0$ qui est la dérivée de toute fonction constante.

Enfin, la solution générale de (E) est la somme des deux fonctions précédentes, d'où f est de la forme $\boxed{f(x) = C.e^{-0{,}08x} + \frac{9}{4} \quad , C \in \mathbb{R}}$

2) ⓐ On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}08x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$ ⇒ Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}08x} = 0$

Puis par produit et somme, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C \times 0 + \frac{9}{4} = \boxed{\frac{9}{4}}$

(b) Tout d'abord, on veut $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \iff \frac{q}{4} = 2 \iff q = 8$

D'où $f(x) = C \cdot e^{-0,08x} + 2$

Puis on a $f(0) = 0,7 \iff C \cdot e^{-0,08 \times 0} + 2 = 0,7$

$\iff C \times 1 + 2 = 0,7$

$\iff C = 0,7 - 2$

$\iff C = -1,3$

D'où $\boxed{(C\,;\,q) = (-1,3\,;\,8)}$

Et $f(x) = -1,3 \cdot e^{-0,08x} + 2$

Ex 3 :

⟹ Partie A :

1) On lit directement $\boxed{f(-1) = -2}$ ⚠ le repère n'est pas orthonormé.

Il s'agit de l'ordonnée du point B.

Puis $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en B.

On a $A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, d'où $f'(-1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-0}{-2+1} = \dfrac{-1}{-1} = \boxed{1}$

2) $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ ont plusieurs points d'intersection,

donc $\mathcal{C}_f$ n'est ni au-dessus de toutes ses tangentes, ni en dessous.

Ainsi f change de convexité sur $]-2\,;+\infty[$

$\boxed{\text{Elle n'est donc pas convexe sur son ensemble de définition.}}$

Par contre, elle semble convexe sur $[-1{,}4\,;+\infty[$

3) $\mathcal{C}_f$ intercepte une unique fois l'axe des abscisses, donc l'équation $f(x) = 0$

semble admettre $\boxed{\text{une unique solution } \alpha}$, avec $\boxed{\alpha \simeq 0{,}1}$ (à 10^{-1} près).

⟹ Partie B : $\forall x \in]-2\,;+\infty[$, $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$

1) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} x+2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ ⟹ Par composition, $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x+2) = -\infty$

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x\to -2^+} x^2+2x-1 = (-2)^2 + 2\times(-2) - 1 = 4-4-1 = -1$

Enfin, par somme, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty}$

2) On admet que f est dérivable sur $]-2;+\infty[$

$\forall x \in]-2;+\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 + 0 + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2} = \boxed{\dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}}$

3) $\forall x \in]-2;+\infty[$, $x+2 > 0$ donc f' est du signe de $2x^2+6x+5$

Etudions ce polynôme : $\Delta = 6^2 - 4\times 2\times 5 = 36 - 40 = -4 < 0$

Le polynôme n'a pas de racine et son signe est celui de son coefficient dominant $2 > 0$. D'où le tableau de variations :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $I =]-2;+\infty[$

On a $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

En notant $J = f(I) = \mathbb{R}$, on a $0 \in J$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } I =]-2;+\infty[}$

Puis par balayage : $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ donc $\alpha \in]0;1[$

$f(0{,}1) < 0$ et $f(0{,}2) > 0$ donc $\alpha \in]0{,}1 ; 0{,}2[$

$f(0{,}11) < 0$ et $f(0{,}12) > 0$ donc $\alpha \in]0{,}11 ; 0{,}12[$

$f(0{,}117) < 0$ et $f(0{,}118) > 0$ donc $\alpha \in]0{,}117 ; 0{,}118[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq 0{,}12}$ (à 10^{-2} près)

5) Comme f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ et s'annule en α, on a :

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

6) On admet que f' est dérivable sur $]-2;+\infty[$

$\forall x \in]-2;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{(4x+6)(x+2) - 1\times(2x^2+6x+5)}{(x+2)^2}$

$$= \frac{4x^2 + 8x + \cancel{6x} + 12 - 2x^2 - \cancel{6x} - 5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x+2)^2}$$

Puis $\forall x \in]-2;+\infty[$, $(x+2)^2 > 0$ donc f'' est du signe de $2x^2+8x+7$

Etudions le polynôme : $\Delta = 8^2 - 4\times2\times7 = 64-56 = 8$

D'où $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{8}}{2\times2} = \dfrac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \notin]-2;+\infty[\\[2ex] x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{8}}{2\times2} = \dfrac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \in]-2;+\infty[\end{cases}$

On a :
(sur $\mathbb{R}$)

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$2x^2+8x+7$		$+$	0	$-$			0	$+$	

D'où

x	-2		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave		convexe	

inflexion

$\Rightarrow$ Partie C : Soit $g : \forall x \in]-2;+\infty[$, $g(x) = \ln(x+2)$

1) Soit $x \in]-2;+\infty[$, dans le R.O.N. $(O;I,J)$, on a $M\begin{pmatrix} x \\ \ln(x+2) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_g$

et $J\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ \ln(x+2)-1 \end{pmatrix}$

Puis $\forall x \in]-2;+\infty[$,
$$\begin{aligned} h(x) &= JM^2 \\ &= \overrightarrow{JM}^2 \\ &= x^2 + \left(\ln(x+2)-1\right)^2 \end{aligned}$$

2) ⓐ On admet que $\forall x \in]-2;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{2f(x)}{x+2}$

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$	‖		$+$		
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

ⓑ h' s'annule et change de signe ($-$ vers $+$) en α , donc h admet un minimum en α. Ainsi, la valeur JM^2 est minimale en α. Or en composant par la racine carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient que JM et JM^2 suivent les mêmes variations sur cet intervalle , donc $\boxed{JM \text{ est minimale en } \alpha.}$

idéalement

$\hookrightarrow$ En effet, en notant $u = JM \geqslant 0$ (car c'est une distance) , on a $u^2 = JM^2$ puis $(u^2)' = \underbrace{2u}_{\geqslant 0} . u'$, donc $(u^2)'$ et u' sont de même signe , et ainsi u^2 et u suivent les mêmes variations.

3) (a) $f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0$

$\iff \ln(\alpha+2) = -\alpha^2 - 2\alpha + 1$

(b) Soit $M_\alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ \ln(\alpha+2) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_g$

Comme $J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{JM_\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \ln(\alpha+2) - 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JM_\alpha}$ est vecteur directeur de (JM_α), et colinéaire à $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha} \end{pmatrix}$

Ainsi, $m_1 = \dfrac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha}$ est le coeff. directeur de (JM_α).

(ou On pouvait calculer $m_1 = \dfrac{y_{M_\alpha} - y_J}{x_{M_\alpha} - x_J} = \dfrac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha - 0} = \dfrac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha}$)

Puis le coeff. directeur m_2 de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α vaut :

$m_2 = g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+2}$ car g dérivable par composition sur $]-2; +\infty[$, et $\forall x \in]-2; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+2}$

En utilisant la question précédente, on a :

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+2} = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha \cancel{+1} \cancel{-1}}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+2} = \frac{-\alpha(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+2)} = \boxed{-1}$$

Donc $\boxed{\text{les deux droites sont bien perpendiculaires.}}$

<u>Rem :</u> Sans indication de l'énoncé, on pouvait faire le produit scalaire de $\overrightarrow{JM_\alpha}$ et de $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(\alpha) \end{pmatrix}$, $\vec{v}$ étant un vecteur directeur de la tgte à $\mathcal{C}_g$ en M_α.

$$\overrightarrow{JM_\alpha} \cdot \vec{v} = \alpha \times 1 + (\ln(\alpha+2) - 1) \times \frac{1}{\alpha+2} = \alpha + \frac{-\alpha^2 - 2\alpha \cancel{+1} \cancel{-1}}{\alpha+2}$$

$$\iff \overrightarrow{JM_\alpha} \cdot \vec{v} = \alpha - \frac{\alpha \cancel{(\alpha+2)}}{\cancel{\alpha+2}} = \alpha - \alpha = 0$$

Ex 4 :

Dans un R.O.N. de l'espace, on a : $A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Affirmation 1 : VRAIE}}$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ non colinéaires car leur première coordonnée sont opposées mais pas les autres.

Ainsi, les points A ; C et D ne sont pas alignés, et définissent donc un plan $\mathcal{P}$.

Puis $\begin{cases} 8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 8\times 2 - 5\times 0 + 4\times 0 - 16 = 16 - 16 = 0 \\ 8x_C - 5y_C + 4z_C - 16 = 8\times 4 - 5\times 4 + 4\times 1 - 16 = 32 - 20 + 4 - 16 = 36 - 36 = 0 \\ 8x_D - 5y_D + 4z_D - 16 = 8\times 0 - 5\times 0 + 4\times 4 - 16 = 16 - 16 = 0 \end{cases}$

Donc $\mathcal{P} = (ACD)$ a bien pour équation : $8x - 5y + 4z - 16 = 0$

⚠ Vérifier l'appartenance des points A ; C et D au plan $\mathcal{P}$ proposé n'était pas suffisant. Il fallait en effet s'assurer que les 3 points n'étaient pas alignés.

$\boxed{\text{Affirmation 2 : FAUSSE}}$

Comme A ; C et D forme le plan $\mathcal{P}$, il suffit de tester si les coordonnées du point B vérifient l'éq. du plan $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} 8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 &= 8\times 0 - 5\times 4 + 4\times 3 - 16 \\ &= 0 - 20 + 12 - 16 \\ &= -8 - 16 \\ &= -24 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $B \notin (ACD)$ donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

<u>Rem :</u> On pouvait aussi résoudre un système pour voir si $\overrightarrow{AB}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, mais c'était plus long.

Affirmation 3 : VRAIE

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ non colinéaires car leur 3ème composante sont opposées mais pas les autres. Ainsi (AC) et (BH) ne sont ni strictement parallèles, ni confondues. Elles sont donc soit sécantes, soit non-coplanaires. Ecrivons leur représentation paramétrique en prenant bien le soin d'utiliser 2 paramètres différents :

$$(AC) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (BH) : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Puis étudions $(AC) \cap (BH)$:

$$\begin{cases} 2 + 2t = -\lambda \\ 4t = 4 - 3\lambda \\ t = 3 - \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + 2(3-\lambda) = -\lambda \\ 4(3-\lambda) = 4 - 3\lambda \\ t = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 + 6 - 2\lambda = -\lambda \\ 12 - 4\lambda = 4 - 3\lambda \\ t = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 8 \\ \lambda = 8 \\ t = 3 - \lambda = 3 - 8 = -5 \end{cases}$$ compatibles

Donc (AC) et (BH) sont sécantes en un point I qui est le point de (AC) de paramètre $t = -5$, et également le point de (BH) de paramètre $\lambda = 8$

$\boxed{\text{Affirmation 4 : VRAIE}}$

On a (ABC) : $x - y + 2z - 2 = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

Puis on a $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, colinéaire à $\vec{n}$ puisque $\overrightarrow{DH} = -\vec{n}$

Ainsi, $\overrightarrow{DH}$ est également normal à (ABC), et donc $(DH) \perp (ABC)$

De plus, d'après la question 2, nous savons que $D \notin (ABC)$.

Il reste à vérifier si $H \in (ABC)$:

$$x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0$$

Donc $H \in (ABC)$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} H \in (ABC) \\ D \notin (ABC) \\ (DH) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \text{H est le proj. orth. de D sur } (ABC)$$