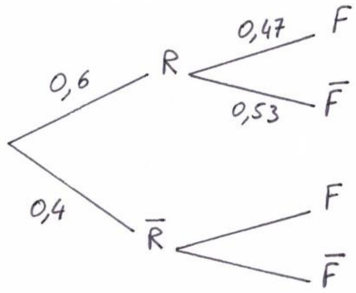
Ex 1 :

⟹ Partie A :

1)

a)



b) $P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F) = 0,6 \times 0,47 = \boxed{0,282}$

c) $\{R ; \overline{R}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la loi des probabilités totales :

$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$

$\Leftrightarrow P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F)$

$\Leftrightarrow P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(F) = 0,38 - 0,282$

$\Leftrightarrow P_{\overline{R}}(F) = \dfrac{0,098}{P(\overline{R})}$

$\Leftrightarrow P_{\overline{R}}(F) = \dfrac{0,098}{0,4}$

$\Leftrightarrow \boxed{P_{\overline{R}}(F) = 0,245}$

d) $P_F(R) = \dfrac{P(R \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,282}{0,38} = \dfrac{141}{190} \simeq 0,74 \boxed{< 0,8}$

Donc $\boxed{\text{l'affirmation est fausse.}}$

2) ⓐ On répète $n = 20$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " le client a acheté la carte de fidélité " est égale à : $p = P(F) = 0{,}38$

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0{,}38}$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}38)}$

ⓑ $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$

$= 1 - P(X \leq 4)$ fonction de répartition de la calculatrice.

$\simeq 1 - 0{,}073$

$\boxed{\simeq 0{,}927}$ (à 10^{-3} près)

⇒ Partie B :

1) $X_2 \sim \mathcal{B}(1000\,;\,0{,}47)$

Donc $E(X_2) = 1000 \times 0{,}47 = \boxed{470}$

$\boxed{\text{En moyenne, 470 clients sur 1000 ont acheté la carte de fidélité.}}$

2) On a $Z = \frac{1}{1000} \times Y = \frac{1}{1000}(Y_1 + Y_2)$

$\boxed{\text{Donc } Z \text{ est la variable aléatoire moyenne qui modélise le montant moyen offert à chacun des 1000 clients.}}$

* Par linéarité de l'espérance, on a :

$E(Z) = E\left(\frac{1}{1000}(Y_1 + Y_2)\right) = \frac{1}{1000}\left(E(Y_1) + E(Y_2)\right)$

L'énoncé donne : $E(Y_1) = 30\,000$

Or $E(Y_2) = E(50\,X_2) = 50\ E(X_2) = 50 \times 470 = 23\,500$

D'où $E(Z) = \frac{1}{1000}\left(30\,000 + 23\,500\right) = \boxed{53,5}$

* Puis comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on a :

$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2)$

L'énoncé donne $V(Y_1) = 100\,000$

Par ailleurs, $V(Y_2) = V(50\,X_2) = 50^2 \times V(X_2) = 2500 .\ V(X_2)$

Comme $X_2 \sim \mathcal{B}(1000\,;\,0,47)$, on a $V(X_2) = 1000 \times 0,47 \times (1-0,47) = 249,1$

Ainsi, $V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2)$

$= 100\,000 + 2500 \times 249,1$

$= 722\,750$

Enfin, $V(Z) = V\left(\frac{1}{1000} . Y\right)$

$= \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \times V(Y)$

$= 10^{-6} \times 722\,750$

$= \boxed{0,72275}$

3) On a : $51,7 < Z < 55,3$

$\Leftrightarrow 53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8$

$\Leftrightarrow -1,8 < Z - 53,5 < 1,8$

$\Leftrightarrow -1,8 < Z - E(Z) < 1,8$

$\Leftrightarrow |Z - E(Z)| < 1,8$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a :

$$P(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8) \leqslant \frac{V(Z)}{3,24}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|Z - E(Z)| < 1,8) \leqslant \frac{V(Z)}{3,24}$$

$$\Leftrightarrow P(|Z - E(Z)| < 1,8) \geqslant 1 - \frac{V(Z)}{3,24}$$

$$\Leftrightarrow P(51,7 < Z < 55,3) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

Or $1 - \frac{0,72275}{3,24} \simeq 0,78 > 0,75$

Donc par transitivité, $\boxed{P(51,7 < Z < 55,3) > 0,75}$

Ex 2 :

$\boxed{\text{1) VRAIE}}$

Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}6\\1\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\-2\\-1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$, non colinéaires car A ; B et C ne sont pas alignés.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12-6-6 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + (-1)\times 0 = 12-12+0 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires qui dirigent le plan (ABC). Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

$\boxed{\text{2) VRAIE}}$

Il suffit de vérifier si les coordonnées des points A <u>et</u> B vérifient la représentation paramétrique proposée, i.e que t_A et t_B existent.

* Pour le point A, on trouve $t_A = -1$

$$\begin{cases} x_A = 2+2t_A \\ y_A = 3-t_A \\ z_A = 1+2t_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2+2t_A \\ 4 = 3-t_A \\ -1 = 1+2t_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_A = -2 \\ t_A = 3-4 \\ 2t_A = -1-1 \end{cases} \Leftrightarrow t_A = -1$$

OK

* Pour le point B, on trouve $t_B = 2$

$$\begin{cases} x_B = 2+2t_B \\ y_B = 3-t_B \\ z_B = 1+2t_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2+2t_B \\ 1 = 3-t_B \\ 5 = 1+2t_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_B = 6-2 \\ t_B = 3-1 \\ 2t_B = 5-1 \end{cases} \Leftrightarrow t_B = 2$$

OK

$\boxed{\text{3) FAUSSE}}$

D'après l'équation proposée, $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

Or on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{w}$ car leurs coordonnées ne sont de toute évidence pas proportionnelles (on peut faire un système pour le montrer) :

$\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\vec{w} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} = \lambda.\vec{w} \iff \begin{cases} 6 = 2\lambda \\ -3 = 2\lambda \\ 6 = -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \\ \lambda = -6 \end{cases}$ ← incompatibles

$\boxed{\text{4) FAUSSE}}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}'$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont ni parallèles ni confondues. Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont coplanaires qu'à condition d'être sécantes. Etudions leur intersection :

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' : \begin{cases} 3+t = 2t' \\ 1+t = 4-t' \\ 2+t = -1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = -4+3t' \quad (L_1 - L_2) \\ t = 3-t' \\ t = -3+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t' = 6 \\ t = 3-t' \\ t = -3+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = 2 \\ t = 3-2 = 1 \\ t = -3+2\times 2 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{compatibles}$$

Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en I, point de paramètre $\begin{cases} t = 1 \text{ de } \mathcal{D} \\ t' = 2 \text{ de } \mathcal{D}' \end{cases}$

Ainsi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires

Ex 3 :

Soit $a \in]1;+\infty[$, on considère (u_n) : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$

=> Partie **A** : $a \in]1;2[$

1) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n$

$\iff u_{n+1} - 2 = u_n \times u_n - 2 \times u_n$

$\iff \boxed{u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$

$= u_n^2 - 3u_n + 2$

Posons $X = u_n$ et étudions le polynôme $X^2 - 3X + 2$

$X_1 = 1$ est sol. évidente car la somme des coefficients est nulle

Puis $X_1 \cdot X_2 = \frac{2}{1} \iff 1 \times X_2 = 2 \iff X_2 = 2$

D'où $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

Ainsi, en remplaçant X par u_n, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 = \boxed{(u_n - 1)(u_n - 2)}$

Rem : On pouvait également développer séparément chaque membre de l'égalité :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$

et $(u_n - 1)(u_n - 2) = u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

2) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a \in]1 ; 2[$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$

On a (HR) : $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$

Or d'après l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1 > 0$

Donc par produit, $u_n(u_n - 2) < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - 2 < 0$ d'après (1.a)

$\Leftrightarrow u_{n+1} < 2 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

ⓑ On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n > 1 \\ u_n < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n - 1 > 0 \\ u_n - 2 < 0 \end{cases}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ d'après (1.b)

$\Leftrightarrow (u_n)$ strictement décroissante

Par ailleurs, (u_n) est minorée par 1 car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [1 ; 2]$ ← ⚠ on inclut les bornes avec le passage à la limite.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Comme (u_n) converge vers un réel ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Soit $x \in [1;2]$, $f(x) = x \iff x^2 - 2x + 2 = x$

$\iff x^2 - 3x + 2 = 0$ cf 1.b

$\iff (x-1)(x-2) = 0$

$\iff x - 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$\iff x = 1$ ou $x = 2$

Or (u_n) est strictement décroissante et $u_0 \in]1;2[$

Donc la limite de (u_n) ne peut pas être égale à 2.

Ainsi $l = 1$, i.e. $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

⇒ <u>Partie B :</u> $a = 2$

1) u(2,1) renvoie u_1 pour $a = 2$
u(2,2) renvoie u_2 pour $a = 2$

or $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = u_0^2 - 2u_0 + 2 = 2^2 - 2\times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2 \\ u_2 = u_1^2 - 2u_1 + 2 = 2 \quad \text{d'après le calcul précédente} \end{cases}$

Ainsi, u(2,1) et u(2,2) renvoient la même valeur : $\boxed{2}$

2) Conjecture : il semble que pour $a = 2$, (u_n) soit constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2$

<u>Rem :</u> Cette conjecture se démontre très facilement par récurrence.

⇒ Partie C :

1) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n - 1)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$

$$= \ln(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1)$$

$$= \ln(u_n^2 - 2u_n + 1)$$

$$= \ln\left((u_n - 1)^2\right)$$

$$= 2\ln(u_n - 1)$$

$$= 2v_n$$

$$\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de premier terme } v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a-1) \quad \text{avec } a > 1}$$

b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = 2^n . \ln(a-1)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n - 1) = 2^n . \ln(a-1)$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(u_n - 1)} = e^{2^n . \ln(a-1)}$$

$$\Leftrightarrow u_n - 1 = e^{2^n . \ln(a-1)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = 1 + e^{2^n . \ln(a-1)}}$$

2) Procédons par disjonction de cas avec :

* $a \in]1 ; 2[$ traité dans la partie A
* $a = 2$ traité dans la partie B
* $a > 2$

* <u>Pour le cas $a \in]1;2[$:</u>

$\forall a \in]1;2[,\ 0 < a-1 < 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(a-1) < 0$

Or comme $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Par produit, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n . \ln(a-1) = -\infty$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n . \ln(a-1)} = 0$

Ainsi, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + e^{2^n . \ln(a-1)}$, on retrouve le résultat de la partie A : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 + 0 = 1$

* <u>Pour le cas $a = 2$:</u>

$a = 2 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow \ln(a-1) = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n . \ln(a-1) = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ e^{2^n . \ln(a-1)} = e^0 = 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + e^{2^n . \ln(a-1)} = 1 + 1 = 2$

On retrouve le résultat de la partie B, avec (u_n) constante de valeur 2.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

* <u>Pour le cas $a > 2$:</u>

$a > 2 \Rightarrow a - 1 > 1 \Rightarrow \ln(a-1) > 0$

Or on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Donc par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n . \ln(a-1) = +\infty$

Par ailleurs, on a $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \cdot \ln(a-1)} = +\infty$

Puis par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

* Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1 < a < 2 & \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 & \multirow{2}{*}{\Big\} \ (u_n) \text{ converge}} \\ a = 2 & \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 & \\ a > 2 & \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty & (u_n) \text{ diverge} \end{array}}$$

ou

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < a < 2 \\ 2 & \text{si } a = 2 \\ +\infty & \text{si } a > 2 \end{cases}}$$

Ex 4 :

⇒ Partie A :

1) a) $f(0)$ est l'ordonnée du point N. On lit $f(0) = y_N = \boxed{2}$

b) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente $\tau = (NP)$ à $\mathcal{C}_f$ en N.

D'où $f'(0) = \dfrac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \dfrac{0-2}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

2) $\mathcal{C}_f \cap (O, \vec{i}) = \left\{ M\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \right\}$

D'où $f(x) = 0 \iff x = x_M \iff x = -2$ $\boxed{S = \{-2\}}$

3) f change de convexité sur $\mathbb{R}$ car $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente τ en N.

$\boxed{\text{Elle n'est donc pas convexe sur } \mathbb{R}.}$

Il semble qu'elle soit concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$

4) D'après le graphique, f est strict. négative sur $]-\infty ; -2[$ et strictement positive sur $]-2 ; +\infty[$. Donc sa primitive F doit être strictement décroissante sur $]-\infty ; -2[$ et strictement croissante sur $]-2 ; +\infty[$.

Par ailleurs, comme f s'annule et change de signe (− vers +) en -2, sa primitive doit admettre un extremum (ici un minimum) en ce point. $\boxed{\text{Il s'agit donc de la courbe 2.}}$

→ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax+b).e^{\lambda x}$ avec $(a;b;\lambda) \in \mathbb{R}^3$

1) On a $f(0) = 2 \iff (a\times 0 + b).e^{\lambda\times 0} = 2$

$\iff b \times e^0 = 2$

$\iff b \times 1 = 2$

$\iff \boxed{b = 2}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax+2).e^{\lambda x}$ avec $(b;\lambda) \in \mathbb{R}^2$

On reprend b pour obtenir l'expression demandée dans l'énoncé.

2) On a $f(-2) = 0 \iff (-2a+b).e^{-2\lambda} = 0$

$\iff \boxed{-2a+b = 0}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0$

$\iff -2a+2 = 0$ car $b = 2$

$\iff 2a = 2$

$\iff \boxed{a = 1}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+2).e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

3) On a $f'(0) = -1$

Or d'après l'énoncé, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \times e^{\lambda x} + (x+2)\times\lambda\times e^{\lambda x}$

$= (\lambda x + 2\lambda + 1).e^{\lambda x}$

Puis $f'(0) = 1 \iff (\lambda\times 0 + 2\lambda + 1).e^{\lambda\times 0} = -1$

$\iff (2\lambda+1)\times e^0 = -1$

$\iff (2\lambda+1)\times 1 = -1$

$\iff 2\lambda + 1 = -1$

$\iff 2\lambda = -2$

$\iff \lambda = -1$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+2).e^{-x}}$

$\Rightarrow$ Partie C : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$

1) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x+2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

en posant $X = -x$

2) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (-x-1) \cdot e^{-x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$, f' est du signe de $-x-1$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) \geqslant 0 \iff -x-1 \geqslant 0 \iff x \leqslant -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justif : $f(-1) = (-1+2) \times e^{-(-1)} = 1 \times e^{1} = e$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une FI du type "$0 \times \infty$"

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = (x+2) \cdot e^{-x} = \dfrac{x+2}{e^{x}} = \dfrac{x}{e^{x}} + \dfrac{2}{e^{x}} = \dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}} + \dfrac{2}{e^{x}}$

Puis on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^{x}} = 0^+$

Par ailleurs, d'après le th. des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$

Donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}} = 0^+$

Enfin, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

3) a) D'après l'énoncé, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x})$
$= (x+1-1) . e^{-x}$
$= x . e^{-x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, f'' est du signe de x sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f	concave	convexe

b) f'' s'annule et change de signe en 0, donc f admet un point d'inflexion en 0 de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}$, i.e. $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

4) a) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $I(t) = \int_{-2}^{t} f(x) . dx = \int_{-2}^{t} (x+2) . e^{-x} . dx$

Posons $u(x) = x+2$ et $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

u et v sont continûment dérivables sur $[-2 ; +\infty[$

D'où $\forall t \geq 0$, $I(t) = \left[-(x+2) . e^{-x}\right]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} 1 \times (-e^{-x}) . dx$

$= -(t+2)e^{-t} + (-2+2) . e^{-(-2)} - \left[e^{-x}\right]_{-2}^{t}$

$= (-t-2) . e^{-t} + 0 - \left(e^{-t} - e^{-(-2)}\right)$

$= (-t-2) . e^{-t} - e^{-t} + e^{2}$

$= (-t-2-1) . e^{-t} + e^{2}$

$\boxed{= (-t-3) . e^{-t} + e^{2}}$

b) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} -t.e^{-t} = \lim\limits_{x \to -\infty} x.e^{x} = 0$ d'après le th. des croissances comparées.

Puis $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} (-t-3).e^{-t} + e^2$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} -t.e^{-t} - 3e^{-t} + e^2$

$= 0 - 3 \times 0 + e^2$

$= e^2$

Comme f est positive sur $[-2 ; +\infty[$, $I(t)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équation $x = -2$ et $x = t$, avec $t \geqslant 0$.

$\boxed{\text{En faisant tendre } t \text{ vers } +\infty \text{, on obtient un domaine (surface) non limité dont l'aire est finie, de valeur } e^2.}$