Ex 1 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5x \cdot e^{-x} = 5\dfrac{x}{e^x}$

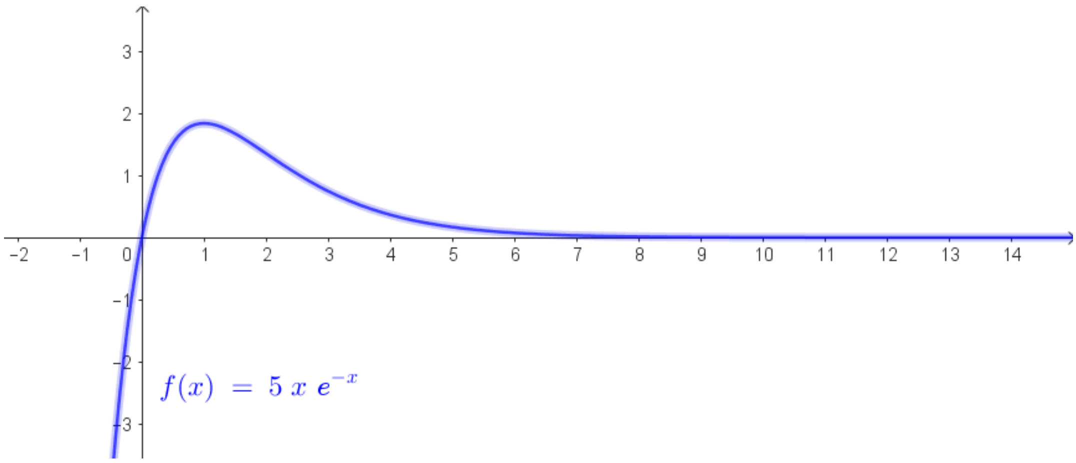
$\boxed{\text{Affirmation 1 : VRAIE}}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (th. croissances comparées)

Donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ puis par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

D'où $\mathcal{C}_f$ admet l'axe $(0, \vec{\imath})$ d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Rem : ⚠ en $-\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc ça ne marche pas.



$\boxed{\text{Affirmation 2 : VRAIE}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5\left(1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})\right) = 5\left(e^{-x} - x e^{-x}\right) = 5(1-x) \cdot e^{-x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = 5(1-x)e^{-x} + 5x \cdot e^{-x}$

$$= 5e^{-x} - \cancel{5xe^{-x}} + \cancel{5xe^{-x}}$$

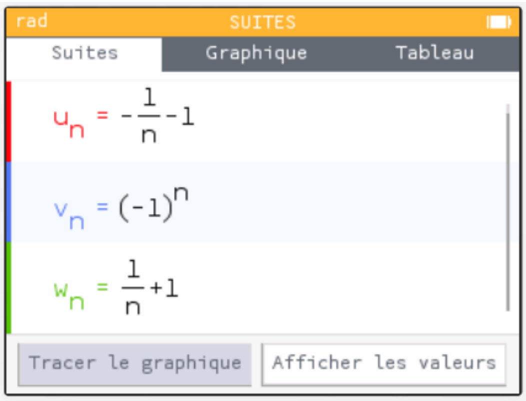
$$= 5e^{-x}$$

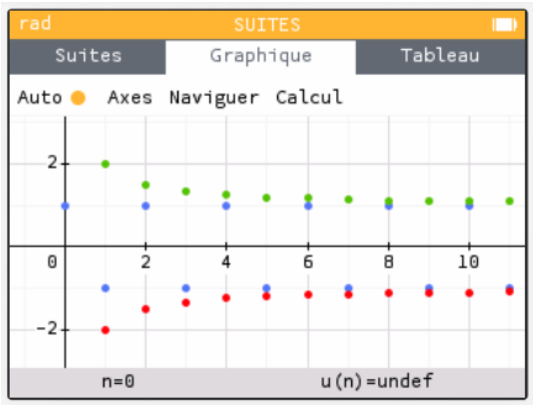
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad , \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1 \quad$ et $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$

$\boxed{\text{Affirmation 3 : FAUSSE}}$

Prenons pour contre-exemple :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \dfrac{-1}{n} - 1 & \text{strictement croissante qui converge vers } -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = (-1)^n & \text{divergente (de 2}^{\text{e}}\text{ espèce) tq } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; w_n = \dfrac{1}{n} + 1 & \text{strictement décroissante qui converge vers } 1 \end{cases}$$

Rem : Si on supposait que (v_n) converge (ce qui n'est pas le cas ici), alors on aurait bien $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \in [-1 ; 1]$





$\boxed{\text{Affirmation 4 :}}$

(u_n) est croissante donc minorée par son 1er terme : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_0 \leqslant u_n$

(w_n) est décroissante donc majorée par son 1er terme : $\forall n \in \mathbb{N}, \; w_n \leqslant w_0$

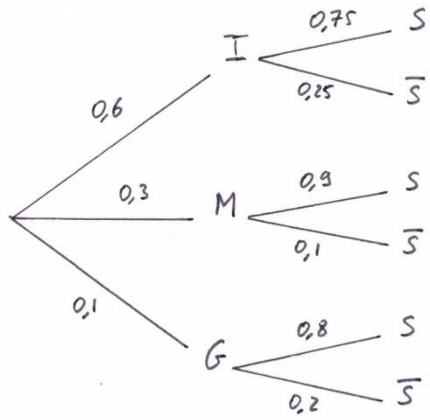
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Donc par transitivité, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$

$$\Rightarrow \quad u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$$

Ex 2 :

1)



2) $P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,6 \times 0,75 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{9}{20} = 0,45}$

3) $\{I ; M ; G\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) \\ &= \frac{9}{20} + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= \frac{9}{20} + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 \\ &= 0,45 + 0,27 + 0,08 \\ &= 0,45 + 0,35 \\ &= \boxed{0,8} \end{aligned}$$

4) $P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{4}{5}} = \frac{9}{\cancel{20}_4} \times \frac{\cancel{5}^1}{4} = \boxed{\frac{9}{16} = 0,5625}$

$\boxed{\simeq 0,563 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}}$

5) (a) On répète $n = 30$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le client est satisfait du service clientèle" est égale à $p = P(S) = 0,8$

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,8}$

$X \sim \mathcal{B}(30\,;\, 0,8)$

(b) $P(X \geqslant 25) = 1 - (P\, X < 25) = 1 - P(X \leqslant 24)$

fct de répartition de la calculatrice

$\simeq 1 - 0,572$

$\boxed{\simeq 0,428}$ (à 10^{-3} près)

6) Désormais $Y \sim \mathcal{B}(n\,;\, 0,2)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p = P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0,2$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut $P(Y \geqslant 1) > 0,99$

$\iff 1 - P(Y = 0) > 0,99$

$\iff P(Y=0) < 0,01$

$\iff \binom{n}{0} \times (0,2)^0 \times (1-0,2)^{n-0} < 0,01$

$\iff 1 \times 1 \times 0,8^n < 0,01$

$\iff 0,8^n < 0,01$

$\iff \ln(0,8^n) < \ln 0,01$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \ln 0,8 < \ln 0,01$

$\iff n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ car $\ln 0,8 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \simeq 20,6$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Il faut donc $\boxed{\text{un échantillon d'au moins 21 clients.}}$

7) ⓐ On a $T = T_1 + T_2$

Puis par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(T_1 + T_2)$

$= E(T_1) + E(T_2)$

$= 4 + 3$

$= \boxed{7}$

Les variables aléatoires T_1 et T_2 étant <u>indépendantes</u> (admis dans l'énoncé),

$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = \boxed{3}$

ⓑ $P(5 \leqslant T \leqslant 9) = P(4 < T < 10)$

$= P(7-3 < T < 7+3)$

$= P(-3 < T-7 < 3)$

$= P(|T - E(T)| < 3)$

$= 1 - P(|T - E(T)| \geqslant 3)$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a :

$P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{V(T)}{3^2} \iff P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{3}{3^2}$

$\iff P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{1}{3}$

$\iff -P(|T - E(T)| \geqslant 3) \geqslant -\dfrac{1}{3}$

$\iff 1 - P(|T - E(T)| \geqslant 3) \geqslant \dfrac{2}{3}$

$\iff \boxed{P(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \dfrac{2}{3}}$

Ex 3 :

1) a) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\-5\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires car leurs deux premières composantes sont égales, mais pas la troisième. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AC} \neq \lambda\overrightarrow{AD}$

Soit $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-5)+(-1)\times(-5)+0\times 10 = -5+5+0 = 0 & \text{donc } \vec{n_1}\perp\overrightarrow{AC} \\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\times(-5)+(-1)\times(-5)+0\times\frac{-5}{2} = -5+5+0 = 0 & \text{donc } \vec{n_1}\perp\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{n_1}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ qui dirigent (CAD), donc $\boxed{\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ est normal à } (CAD)}$

b) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(CAD) \iff \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$

$$\iff 1\times(x-0)+(-1)\times(y-0)+0\times(z-10) = 0$$

$$\iff \boxed{x-y=0}$$

2) a) Soit $H\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$, vérifions que $H\in(CAD)$ et $H\in\mathcal{D}$

$x_H - y_H = \frac{5}{2}-\frac{5}{2} = 0$ donc $\boxed{H\in(CAD)}$

$$\begin{cases} x_H = \frac{5}{2}t_H \\ y_H = 5-\frac{5}{2}t_H \\ z_H = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}t_H \\ \frac{5}{2} = 5-\frac{5}{2}t_H \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_H = 1 \\ -\frac{5}{2}t_H = \frac{-5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} t_H = 1 \\ t_H = 1 \end{cases} \text{ compatible}$$

Donc $\boxed{H\in\mathcal{D}}$ (point de paramètre $t=1$)

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathcal{D}\cap(CAD) = \left\{H\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}\right\}}$

b) Dans le R.O.N., on a $H\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{HB} = -\frac{5}{2}\,\overrightarrow{n_1}$ donc $\overrightarrow{HB}$ est normal à (CAD)

D'où $(HB) \perp (CAD)$

Par ailleurs, nous avons vu que $H \in (CAD)$.

De plus, $B \notin (CAD)$ car $x_B - y_B = 0 - 5 = -5 \neq 0$

Ainsi, on a $\begin{cases} B \notin (CAD) \\ H \in (CAD) \\ (HB) \perp (CAD) \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{H \text{ est le proj. orth. de } B \text{ sur } (CAD)}$

3) a) Dans le R.O.N., on a $H\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2}\times\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} + 0\times 0 = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{HA}$, d'où $\boxed{\text{le triangle } ABH \text{ est rectangle en } H.}$

<u>Rem:</u> On pouvait aussi utiliser la réciproque du th. de Pythagore.

b) ABH est rectangle en H, donc $\mathcal{A}_{ABH} = \frac{1}{2}\,HA \times HB$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$, d'où :

$HA = \|\overrightarrow{HA}\| = \sqrt{\overrightarrow{HA}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$HB = \|\overrightarrow{HB}\| = \sqrt{\overrightarrow{HB}^2} = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Finalement, $\mathcal{A}_{ABH} = \frac{1}{2}\cdot HA \times HB$

$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}\times\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$

$= \cancel{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\cancel{(\sqrt{2})^2}$

$= \boxed{\frac{25}{4}}$

4) a) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{HA} = 0\times\frac{5}{2}+0\times\frac{5}{2}+10\times 0 = 0+0+0 = 0 \quad \text{donc } \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{HA}\\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{HB} = 0\times\frac{-5}{2}+0\times\frac{5}{2}+10\times 0 = 0+0+0 = 0 \quad \text{donc } \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{HB}\end{cases}$

Ainsi, comme $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HB}$ ne sont pas colinéaires (ABH est un triangle rectangle),

$\overrightarrow{OC}$ est normal au plan (ABH), donc $(OC)\perp(ABH)$

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{HA}$, on a $O\in(HA)$

Puis comme $(HA)\subset(ABH)$, par transitivité, $O\in(ABH)$

Ainsi, $\begin{cases}O\in(ABH)\\ C\notin(ABH) \text{ car } \overrightarrow{OC}\neq\vec{0}\\ (OC)\perp(ABH)\end{cases} \Rightarrow O$ est le proj. orth. de C sur (ABH)

Donc $\boxed{(CO) \text{ est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C,}}$ relative à la base ABH.

b) Ainsi, $\mathcal{V}_{ABCH} = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABH}\times CO$ $CO = 10$ car $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\times\frac{25}{\cancel{4}_{2}}\times\cancel{10}^{5}$

$= \boxed{\frac{125}{6}}$

5) Notons K le proj. orth. de H sur (ABC), on a alors $dist\big(H;(ABC)\big) = HK$

Or $\mathcal{V}_{ABCH} = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABC}\times HK \iff HK = \frac{3\,\mathcal{V}_{ABCH}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\cancel{3}\times\frac{125}{\cancel{6}_2}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{125}{2.\mathcal{A}_{ABC}}$

Puis ABC est rect. en B donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}.AB\times BC$

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $AB = 5$, et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(-5)^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

D'où $dist\big(H;(ABC)\big) = \frac{125}{\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times 5\times 5\sqrt{5}} = \frac{5\times\cancel{25}}{\cancel{25}\times\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\times\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \boxed{\sqrt{5}}$

Ex 4 :

⇒ Partie A : Soit f : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$

1) a) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} x - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \boxed{\frac{2x+1}{2x}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

d) f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \frac{2 \times 2x - 2 \times (2x+1)}{(2x)^2} = \frac{4x - 4x - 1}{4x^2} = \frac{-1}{4x^2} < 0$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*}$

2) ⓐ f est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Ainsi, $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$

Or $0 \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Puis $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \times \ln 1 = -1 + \frac{1}{2} \times 0 = -1 < 0$

et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \times \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 > 0$ car $\ln 1 = 0$ et $\ln$ strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\boxed{\alpha \in [1 ; 2]}$

ⓑ f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annulant en α, on a :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ⓒ $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0$

$\iff \frac{1}{2} \ln \alpha = 2 - \alpha$

$\iff \boxed{\ln \alpha = 2(2 - \alpha)}$

$\Rightarrow$ Partie B : $\quad \forall x \in]0;1]$, $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$

1) On admet que g est dérivable sur $]0;1]$

$$\forall x \in]0;1], \quad g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x . \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x . \ln(x) + x\right)$$

$$= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2} . x . \ln(x) - \frac{1}{4}x$$

$$= \boxed{-2x + 1 - \frac{1}{2}x . \ln x}$$

Puis $\forall x \in]0;1]$, $x \times f\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$= 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$$

$$= \boxed{g'(x)}$$

2) ⓐ $x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[\iff 0 < x < \frac{1}{\alpha}$

$$\iff \frac{1}{x} > \alpha$$

$$\iff \frac{1}{x} \in]\alpha;+\infty[$$

Or d'après I.2.b , $\forall X \in]\alpha;+\infty[$, $f(X) > 0$

En posant $X = \frac{1}{x}$, on a donc : $\boxed{\forall x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[, \ f\left(\frac{1}{x}\right) > 0}$

ⓑ Sur $]0;1[$, comme $x > 0$, g' est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

⇒ Partie C :

1) ⓐ Notons h la fonction associée à la parabole $\mathcal{P}$.

$$\forall x \in]0;1],\ g(x) - h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$$
$$= -\frac{1}{4}x^2 \ln x$$

Or $\forall x \in]0;1],\quad x^2 > 0 \quad$ et $\quad \ln x \leqslant 0$ (s'annule pour $x = 1$)

D'où $\forall x \in]0;1],\ x^2 . \ln x \leqslant 0 \iff \frac{-1}{4}x^2 \ln x \geqslant 0 \iff g(x) - h(x) \geqslant 0$
$\iff g(x) \geqslant h(x)$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{P} \text{ sur }]0;1], \text{ avec pour pt d'intersection } \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}}$

ⓑ On veut calculer $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 . \ln x . dx$ Procédons par intégration par partie.

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$
$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{3}x^3$

u et v sont continûment dérivables sur $[\frac{1}{\alpha};1] \subset]0;1]$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 . \ln x . dx = \left[\frac{1}{3}x^3 . \ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{1/\alpha}^{1} \frac{1}{3} \times x^3 \times \frac{1}{x} . dx$$
$$= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \ln 1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \times \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\int_{1/\alpha}^{1} x^2 . dx$$
$$= 0 + \frac{1}{3\alpha^3} . \ln \alpha - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1/\alpha}^{1}$$
$$= \frac{1}{3\alpha^3} \times 2(2-\alpha) - \frac{1}{9}\left(1^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\right)$$

Puis $\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2.\ln x.\,dx = \frac{4-2\alpha}{3\alpha^3} - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{\alpha^3}\right)$

$$= \frac{3(4-2\alpha)}{9\alpha^3} - \frac{1}{9} \times \frac{\alpha^3-1}{\alpha^3}$$

$$= \frac{12-6\alpha-\alpha^3+1}{9\alpha^3}$$

$$\boxed{= \frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}}$$

2) Les fonctions g et h sont positives sur $]0;1]$, et donc sur $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$

Ainsi, $\displaystyle\mathcal{A} = \int_{1/\alpha}^{1} \left(g(x)-h(x)\right).\,dx$

$$= \int_{1/\alpha}^{1} -\frac{1}{4}x^2.\ln x.\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{1/\alpha}^{1} x^2.\ln x.\,dx$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$$

$$\boxed{= \frac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha^3}}$$