Ex 1 :

1) Dans le R.O.N. $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $\boxed{C\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} ; F\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} ; G\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \text{ et } H\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}}$

2) I milieu de $[EF]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_E + x_F) = \frac{1}{2}(0+4) = 2 \\ y_I = \frac{1}{2}(y_E + y_F) = \frac{1}{2}(0+0) = 0 \\ z_I = \frac{1}{2}(z_E + z_F) = \frac{1}{2}(4+4) = 4 \end{cases}$, d'où $I\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

Puis $\vec{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de (IC), donc on a :

$$\boxed{(IC) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 + 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

3) ⓐ $(IC) \perp \mathcal{P}$ donc $\vec{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$

De plus, $G\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

D'où $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{IC} \cdot \vec{GM} = 0$ $\quad \vec{GM}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\\z-4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2(x-4) + 4(y-4) + (-4)(z-4) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 8 + 4y - \cancel{16} - 4z + \cancel{16} = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4y - 4z - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x + 2y - 2z - 4 = 0}$

ⓑ $\mathcal{P} \cap (IC) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z - 4 = 0 \\ x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$

$\Rightarrow (2+2t) + 2 \times 4t - 2(4-4t) - 4 = 0$

$\Rightarrow 2 + 2t + 8t - 8 + 8t - 4 = 0$

$\Rightarrow 18t - 10 = 0$

$\Rightarrow 18t = 10$

$\Rightarrow t = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

Puis $\begin{cases} x_J = 2 + 2t_J = 2 + 2 \times \frac{5}{9} = \frac{18}{9} + \frac{10}{9} = \frac{28}{9} \\ y_J = 4t_J = 4 \times \frac{5}{9} = \frac{20}{9} \\ z_J = 4 - 4t_J = 4 - 4 \times \frac{5}{9} = \frac{36}{9} - \frac{20}{9} = \frac{16}{9} \end{cases}$ D'où $\boxed{J\begin{pmatrix} 28/9 \\ 20/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}}$

Rem : les coordonnées de J étant données dans l'énoncé, on pouvait se contenter de s'assurer qu'elles vérifient bien l'éq. cartésienne de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (IC).

On a $\begin{cases} (IC) \perp \mathcal{P} \\ J \in (IC) \\ J \in \mathcal{P} \end{cases}$, donc $\boxed{\text{J est le projeté orthogonal de C sur } \mathcal{P}}$

ⓒ $x_K + 2y_K - 2z_K - 4 = 0 + 2\times 2 - 2\times 0 - 4 = 0 + 4 - 0 - 4 = 0$ donc $\boxed{K\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}}$

ⓓ $x_B + 2y_B - 2z_B - 4 = 4 + 2\times 0 - 2\times 0 - 4 = 4 + 0 - 0 - 4 = 0$ donc $B\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

Ainsi, $\begin{cases} K \in \mathcal{P} \\ B \in \mathcal{P} \end{cases} \Rightarrow (BK) \subset \mathcal{P}$ ⚠ inclusion

Puis comme on a $K\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc $K \in (AD)$

Or $(AD) \subset (ABC)$ car le carré ABCD est la base du cube ABCDEFGH

D'où $K \in (ABC)$, puis comme $B \in (ABC)$, on a $(BK) \subset (ABC)$

Enfin, $x_A + 2y_A - 2z_A - 4 = 0 + 2\times 0 - 2\times 0 - 4 = 0 + 0 - 0 - 4 = -4 \neq 0$

Donc $A \notin \mathcal{P}$, ce qui se traduit par $(ABC) \neq \mathcal{P}$

Finalement, on a : $\begin{cases} (BK) \subset \mathcal{P} \\ (BK) \subset (ABC) \\ (ABC) \neq \mathcal{P} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} \cap (ABC) = (BK)}$

4) a) Dans le cube ABCDEFGH, on a $(GC) \perp (ABC)$

Or $(ABC) = (KBC)$ car $K \in (ABC)$

D'où $[GC]$ est la hauteur du tétraèdre (pyramide à base triangulaire) BCKG issue de G, donc relative à la base triangulaire BCK

Notons L le projeté orthogonal de K sur $[BC]$.

On a immédiatement $KL = AB = 4$ u.l.

Puis $\mathcal{A}_{BCK} = \frac{1}{2} \times BC \times KL$ car $[KL]$ est la hauteur de BCK issue de K

D'où $\mathcal{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{BCK} \times CG$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BC \times KL \times CG$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}_{3}} \times \cancel{4}^{2} \times 4 \times 4$$

$$\boxed{= \frac{32}{3} \text{ u.v.}}$$

b) On a $\begin{cases} (BK) \subset \mathcal{P} \\ G \in \mathcal{P} \\ G \notin (BK) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P} = (BKG)$

Or on a $\begin{cases} J \in (BKG) \\ J \text{ proj. orth. de } C \text{ sur } (BKG) \end{cases}$

Donc $[CJ]$ est la hauteur du tétraèdre CBKG issue de C, donc relative à la base BKG.

D'où $\mathcal{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{BKG} \times CJ \iff \mathcal{A}_{BKG} = \frac{3 \cdot \mathcal{V}_{CBKG}}{CJ} = \frac{\cancel{3} \times \frac{32}{\cancel{3}}}{CJ} = \frac{32}{CJ}$

Or $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix} -8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}$, donc $CJ = \|\overrightarrow{CJ}\| = \sqrt{\overrightarrow{CJ}^2} = \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2}$

$$\iff CJ = \frac{\sqrt{64 + 256 + 256}}{\sqrt{9^2}} = \frac{\sqrt{576}}{9} = \frac{24}{9} \text{ u.l.}$$

D'où $\mathcal{A}_{BKG} = \frac{32}{CJ} = \frac{32}{\frac{24}{9}} = 32 \times \frac{9}{24} = \frac{4 \times \cancel{8}^{1} \times \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1} \times \cancel{8}_{1}} = \boxed{12 \text{ u.a.}}$

5) D'après la question 3.d), on a : $B \in \mathcal{P}$

De plus, l'énoncé stipule en introduction à la question 3) que : $G \in \mathcal{P}$

D'où $\begin{cases} B \in \mathcal{P} \\ G \in \mathcal{P} \end{cases} \Rightarrow \boxed{(BG) \subset \mathcal{P}}$

6) On note $I' \in [EF]$, donc $\forall x \in [0;4]$, $I'\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\overrightarrow{I'C}\begin{pmatrix} 4-x \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de $(I'C)$ est aussi normal à $\mathcal{P}'$

puisque $(I'C) \perp \mathcal{P}$.

Par ailleurs, on a dans le R.O.N. : $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{I'C} \cdot \overrightarrow{BG} = (4-x) \times 0 + 4 \times 4 + (-4) \times 4 = 0 + 16 - 16 = 0$

Donc $\overrightarrow{I'C} \perp \overrightarrow{BG}$

Ainsi, comme $\overrightarrow{I'C}$ est normal à $\mathcal{P}'$, (BG) est parallèle à $\mathcal{P}'$, soit strictement, soit confondue.

Or l'énoncé stipule que $G \in \mathcal{P}'$.

Donc $\begin{cases} (BG) \,/\!/\, \mathcal{P}' \\ G \in \mathcal{P}' \end{cases} \Rightarrow B \in \mathcal{P}'$

Puis $\begin{cases} B \in \mathcal{P}' \\ G \in \mathcal{P}' \end{cases} \Rightarrow \boxed{(BG) \subset \mathcal{P}'}$

Ex 2 :

⇒ Partie A :

1) On répète $n = 10$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le client a passé moins de 12 minutes à la station" est $p = 0,25$

D'où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$
$X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0,25)$

2) $$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4)$$
$$= 1 - P(X \leqslant 3)$$
$$\simeq 1 - 0,776$$
$$\boxed{\simeq 0,224}$$ à 10^{-3} près

fonction de répartition de la calculatrice

3) $E(X) = n \times p = 10 \times 0,25 = \boxed{2,5}$

En moyenne, sur un grand nombre de tirages, 1 client sur 4 passera moins de 12 minutes à la station.

$\frac{2,5}{10} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

⇒ Partie B :

1) $\boxed{S = T_1 + T_2 + T_3}$

2) a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 6 + 6 + 6 = \boxed{18}$$

Interprétation : En moyenne, l'attente totale est de 18 minutes.

(b) Les 3 variables aléatoires étant <u>indépendantes</u>, on a :

$$V(S) = V(T_1 + T_2 + T_3) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 1+1+1 = \boxed{3}$$

3) $$P(14 < S < 22) = P(18-4 < S < 18+4)$$
$$= P(-4 < S - 18 < 4)$$
$$= P(|S-18| < 4)$$
$$= P(|S - E(S)| < 4)$$
$$= 1 - P(|S - E(S)| \geqslant 4)$$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a :

$$P(|S - E(S)| \geqslant 4) \leqslant \frac{V(S)}{4^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|S - E(S)| \geqslant 4) \leqslant \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow - P(|S - E(S)| \geqslant 4) \geqslant \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|S - E(S)| \geqslant 4) \geqslant 1 - \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow P(14 < S < 22) \geqslant \frac{13}{16}$$

Or $\frac{13}{16} = 0,8125 \geqslant 0,81$

Donc par transitivité, on a $\boxed{P(14 < S < 22) \geqslant 0,81}$

Ex 3 :

⇒ **Partie A :** $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = x - \ln(x^2+1)$

1) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2° Id. Rem.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} \boxed{= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$

ⓑ
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \; x^2+1 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \; (x-1)^2 > 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \; f'(x) > 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, f' s'annule ponctuellement en $x = 1$ et est strictement positive partout ailleurs (sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$).

D'où $\boxed{f \text{ est \underline{strictement} croissante sur } \mathbb{R}}$

Le tableau de variations avec le signe de la dérivée (facultatif) :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$\nearrow$		

2) $\forall x > 0, \quad f(x) = x - \ln(x^2+1)$

$$= x - \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \text{car } x \neq 0$$

$$= x - \left(\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x - \ln(x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{car } x > 0$$

$$= \boxed{x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

3) On utilise la question précédente, mais $x - 2\ln x$ est toujours une FI de la forme "$\infty - \infty$". Il faut encore modifier l'expression.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

* Puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$

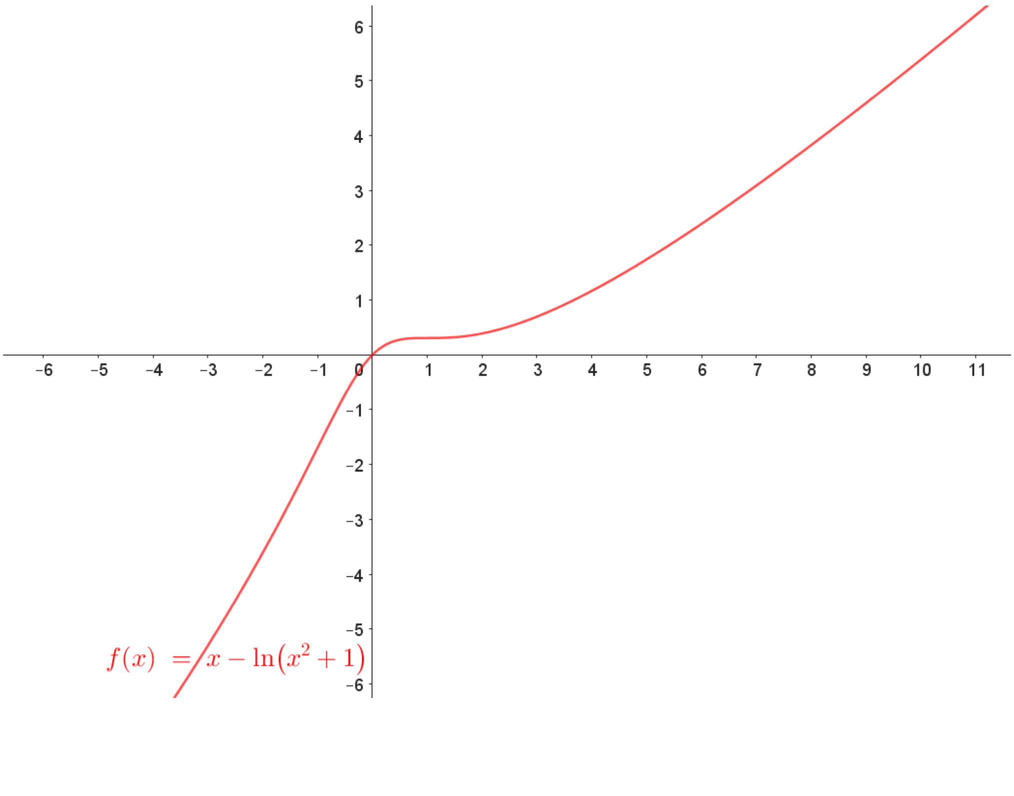
* De plus, d'après le th. des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

  D'où par opérations sur les limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) = 1 - 2\times 0 = 1$

* Finalement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)}_{1} - \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}_{0}\right) = +\infty$

  D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Rem: La limite de f en $-\infty$ ne pose aucune difficulté à partir de l'expression initiale de f : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$\Rightarrow$ Partie B : Soit (u_n) : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 7 \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$

D'après HR : $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$ car f (strict) croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(u_n) \geqslant 0 - \ln(0^2+1)$

$\Rightarrow u_{n+1} \geqslant 0 - \ln 1$ car $u_{n+1} = f(u_n)$

$\Rightarrow u_{n+1} \geqslant 0 - 0$

$\Rightarrow u_{n+1} \geqslant 0$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2 + 1\right)$

Or d'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow u_n^2 + 1 \geqslant 1$

$\Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant \ln 1$ par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$

$\Rightarrow -\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

$\Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ décroissante}}$

3) D'après les questions précédentes, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geqslant 0$

4) (u_n) converge vers un réel $l \geqslant 0$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
f(l) = l &\iff l - \ln(l^2+1) = l \\
&\iff -\ln(l^2+1) = 0 \\
&\iff \ln(l^2+1) = 0 \\
&\iff \ln(l^2+1) = \ln 1 \\
&\iff l^2 + 1 = 1 \\
&\iff l^2 = 0 \\
&\iff \boxed{l = 0} \quad \text{(solution double)}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

5) ⓐ La boucle "while" doit tourner tant que la condition souhaitée $u_n \leqslant h$ n'est pas atteinte, i.e. tant que sa négation $u_n > h$ est réalisée.

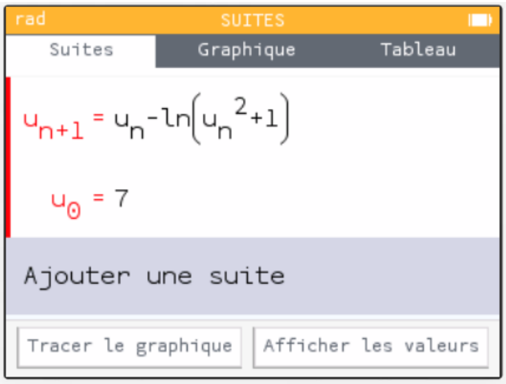
D'où le script :

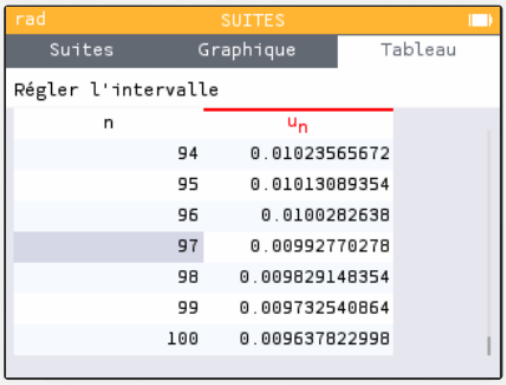
```
while u > h:
    n = n+1
    u = u - ln(u*u + 1)
```

```python
from math import log as ln

def seuil(h):
    n=0
    u=7
    while u>h:
        n=n+1
        u=u-ln(u*u+1)
    return n
```

b) La suite (u_n) étant décroissante, on peut saisir la suite sur la calculatrice et regarder à partir de quel rang n on observe $u_n \leq 0,01$





n	u_n
94	0.01023565672
95	0.01013089354
96	0.0100282638
97	0.00992770278
98	0.009829148354
99	0.009732540864
100	0.009637822998

On voit que : $u_{96} > 0,01$ et $u_{97} \leq 0,01$

Donc on observe $u_n \leq 0,01$ à partir du rang $\boxed{n = 97}$

Remarque : On peut directement saisir puis lancer le programme sur la calculatrice.

```
>>> seuil(0.01)
97
```

$\Rightarrow$ Partie C :

1) D'après A.1.b), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, d'après B.1), on a $f(0) = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, et en particulier $\boxed{\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) > 0 \end{cases}}$

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	

2) f est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc aussi sur $[2\,;4] \subset \mathbb{R}_+$

De plus, f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[2\,;4]$.

Ainsi, $I = \displaystyle\int_2^4 f(x).dx$ est égale à l'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

3) Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'ordre croissant, on a :

$\forall x \in [2\,;4]$, $\quad 0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$

$$\Rightarrow \int_2^4 (0{,}5x - 1)\,dx \leqslant \int_2^4 f(x).dx \leqslant \int_2^4 (0{,}25x + 0{,}25)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[0{,}25x^2 - x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[0{,}125x^2 + 0{,}25x\right]_2^4$$

$$\Rightarrow (0{,}25 \times 4^2 - 4) - (0{,}25 \times 2^2 - 2) \leqslant I \leqslant (0{,}125 \times 4^2 + 0{,}25 \times 4) - (0{,}125 \times 2^2 + 0{,}25 \times 2)$$

$$\Rightarrow 4 - 4 - 1 + 2 \leqslant I \leqslant 2 + 1 - 0{,}5 - 0{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \leqslant I \leqslant 2}$$

Ex 4 :

1) ⓐ FAUSSE

On lit dans le tableau : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5 \neq -2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \neq -2 \end{cases}$

Donc la droite d'éq. $y = -2$ n'est pas asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

Rem : On a $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

Donc la droite d'éq. $x = -2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

ⓑ FAUSSE

f est décroissante strictement sur $]-\infty\,;-2[$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$

Donc lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ s'approche de 5 par valeurs inférieures, i.e. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5^-$

Ainsi, par différence, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 5 = 5^- - 5 = 0^-$

Puis par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = -\infty$

2) ⓐ VRAIE

g dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x) \cdot e^{-x}$

puis $g''(x) = -1 \times e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = (x-2) \cdot e^{-x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$, g'' est du signe de $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
g		concave	inflexion	convexe	

$g(2) = 2 \times e^{-2} = \dfrac{2}{e^2}$

(g'' s'annule et change de signe en $x = 2$, donc $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$ pt inflex

b) VRAIE

Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) - x = xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$

Puis soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff e^{-x} \geqslant e^0 \iff -x \geqslant 0$
$\iff x \leqslant 0$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$x(e^{-x} - 1)$		$-$	0	$-$	

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(e^{-x} - 1) \leqslant 0 \iff g(x) - x \leqslant 0 \iff g(x) \leqslant x$

Comme $]-\infty\,; 2[\subset \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in]-\infty\,; 2[$, $g(x) \leqslant x$

3) FAUSSE

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = x \cdot \ln(x) - 1$

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et différence de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + 0 = 1 + \ln x$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) \geqslant 0 \iff 1 + \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}$

D'où le tableau de variations de h :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ -1	$\searrow$	$-(1+e^{-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0$ (th. croissances comparées), donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$h(e^{-1}) = e^{-1} \times \ln(e^{-1}) - 1 = e^{-1} \times (-1) - 1 = -(1 + e^{-1})$

…/…

* h est décroissante sur $]0 ; e^{-1}]$ et $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -1$

Donc h est majorée par $-1 < 0$ sur $]0 ; e^{-1}]$

Ainsi, l'éq. $h(x) = 0$ n'admet aucun solution sur $]0 ; e^{-1}]$

* h est continue (car dérivable) et <u>strictement</u> croissante sur $]e^{-1} ; +\infty[$

On a $h\left(]e^{-1} ; +\infty[\right) =]-(1+e^{-1}) ; +\infty[$

Comme $0 \in h\left(]e^{-1} ; +\infty[\right)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'éq. $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]e^{-1} ; +\infty[$

* Par disjonction de cas, nous venons de montrer que :

$\exists ! \alpha \in \mathbb{R},\ h(\alpha) = 0$, i.e. $\exists ! \alpha \in \mathbb{R},\ x . \ln x = 1$