Ex1 :

1) (a) Dans le R.O.N. $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$, on a $\boxed{I\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix}1\\1\\1/2\end{pmatrix}}$

Puis N milieu de $[IJ] \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{1}{2}(x_I + x_J) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4} \\ y_N = \frac{1}{2}(y_I + y_J) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \\ z_N = \frac{1}{2}(z_I + z_J) = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$ D'où $\boxed{N\begin{pmatrix}3/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}}$

(b) On a : $\vec{IJ}\begin{pmatrix}x_J - x_I\\y_J - y_I\\z_J - z_I\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{IJ}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\1-0\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\vec{IJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix}}$

et $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où $\vec{NF}\begin{pmatrix}x_F - x_N\\y_F - y_N\\z_F - z_N\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{NF}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{4}\\0-\frac{1}{2}\\1-\frac{1}{4}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{NF}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\vec{NF}\begin{pmatrix}0{,}25\\-0{,}5\\0{,}75\end{pmatrix}}$

(c) Dans le R.O.N., on a :

$\vec{IJ}\cdot\vec{NF} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{2} = 0$

Donc $\boxed{\vec{IJ} \perp \vec{NF}}$

(d) Dans le triangle FIJ, on a $N \in [IJ]$ et (FN) orthogonale à (IJ) car $\vec{IJ}\perp\vec{NF}$. D'où (NF) est perpendiculaire à (IJ).

Ainsi, (FN) est la hauteur du triangle FIJ issue de F.

D'où $\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{1}{2}\, NF \times IJ$

Or $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$ d'après l'énoncé

et $IJ = \|\vec{IJ}\| = \sqrt{\vec{IJ}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ u.l.

Finalement, $\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{16}\sqrt{14\times 6} = \frac{1}{16}\sqrt{7\times 2\times 2\times 3} = \frac{1}{8}\times\sqrt{21}$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{21}}{8}}$ u.a.

2) ⓐ FIJ est un triangle non plat ($\mathcal{A}_{FIJ} \neq 0$) donc les vecteurs

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Ils dirigent donc le plan (FIJ)

Dans le R.O.N., avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, on a :

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{IF} = 4 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 + (-2) \times 1 = 2 + 0 - 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{IF}$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{IJ} = 4 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 1 + (-2) \times \frac{1}{2} = 2 - 1 - 1 = 0$ donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{IJ}$

$\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ qui dirigent le plan (FIJ), donc $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est normal au plan } (FIJ)}$

ⓑ $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (FIJ), donc ce plan a une équation cartésienne de la forme :

$$4x + (-1) \times y + (-2) \times z + d = 0$$

i.e. $4x - y - 2z + d = 0$

or $I\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (FIJ) \iff 4x_I - y_I - 2z_I + d = 0$

$\iff 4 \times \frac{1}{2} - 0 - 2 \times 0 + d = 0$

$\iff 2 + d = 0$

$\iff d = -2$

Ainsi, (FIJ) : $\boxed{4x - y - 2z - 2 = 0}$

Rem : l'équation étant donnée dans l'énoncé, on pouvait aussi tester si les coordonnées des points I, F et J vérifient l'équation proposée.

c) $d \perp (FIJ)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ normal à (FIJ) est vecteur directeur de d.

De plus, $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in d$, donc :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 4t \\ y = 1-t \\ z = 1-2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

d) Notons K le projeté orthogonal de H sur (FIJ)

On a ainsi : $\text{dist}(H ; (FIJ)) = HK$

Comme $d \perp (FIJ)$ et $H \in d$, on a : $d \cap (FIJ) = \{K\}$

D'où $\begin{cases} K \in (FIJ) \\ K \in d \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_K - y_K - 2z_K - 2 = 0 \\ x_K = 4t_K \\ y_K = 1 - t_K \\ z_K = 1 - 2t_K \end{cases}$

$$\Rightarrow 4 \times 4t_K - (1 - t_K) - 2(1 - 2t_K) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 16t_K - 1 + t_K - 2 + 4t_K - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 21t_K - 5 = 0$$

$$\Rightarrow t_K = \frac{5}{21}$$

D'où $\begin{cases} x_K = 4 \times t_K = 4 \times \frac{5}{21} = \frac{20}{21} \\ y_K = 1 - t_K = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21} \\ z_K = 1 - 2t_K = 1 - 2 \times \frac{5}{21} = \frac{11}{21} \end{cases}$

On a donc $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}20/21\\16/21\\11/21\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}20/21\\-5/21\\-10/21\end{pmatrix}$

Ainsi, $\text{dist}(H ; (FIJ)) = HK = \|\overrightarrow{HK}\| = \sqrt{\overrightarrow{HK}^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(\frac{-5}{21}\right)^2 + \left(\frac{-10}{21}\right)^2}$

i.e. $\text{dist}\left(H ; (FIJ)\right) = \sqrt{\dfrac{400+25+100}{21^2}} = \dfrac{\sqrt{525}}{\sqrt{21^2}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 21}}{21}$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{dist}\left(H ; (FIJ)\right) = \dfrac{5\sqrt{21}}{21}}$ u.l.

(e) [HK] est la hauteur du tétraèdre HFIJ issue de H, donc relative à la base triangulaire FIJ.

Or d'après 1.b), on a : $\mathcal{A}_{FIJ} = \dfrac{\sqrt{21}}{8}$ u.a.

et d'après 2.d), on a : $HK = \dfrac{5\sqrt{21}}{21}$ u.l.

Ainsi, $\mathcal{V}_{HFIJ} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FIJ} \times HK$

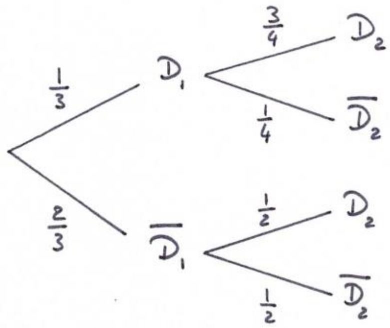
$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\cancel{\sqrt{21}}}{8} \times \dfrac{5 \times \cancel{\sqrt{21}}}{\cancel{21}}$

$\boxed{= \dfrac{5}{24}}$ u.v.

Ex 2 :

⇒ Partie A :

1)



2) $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

3) $\{ D_1 ; \overline{D_1} \}$ forme un système complet d'événements.

D'après la loi des probabilités totales,

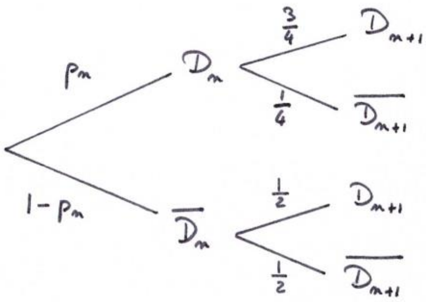
$$\begin{aligned} p_2 = P(D_2) &= P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap D_2) \\ &= \frac{1}{4} + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \\ &= \boxed{\frac{7}{12}} \end{aligned}$$

4) $P_{\overline{D_2}}(D_1) = \dfrac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} = \dfrac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{1 - P(D_2)} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{7}{12}} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}}$

D'où $\boxed{P_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{1}{5}}$

=> Partie B :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,



$\{D_n ; \overline{D_n}\}$ forme un système complet d'événements,
D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(D_{n+1}) &= P(D_n \cap D_{n+1}) + P(\overline{D_n} \cap D_{n+1}) \\ &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{3}{4} + (1-p_n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_n \\ &= \boxed{\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{7}{12}$ (d'après partie A)

or $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, donc $p_1 \leqslant p_2 < \frac{2}{3}$ => $\mathcal{P}(1)$ vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$

D'après (HR) : $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$ => $\frac{1}{4} p_n \leqslant \frac{1}{4} p_{n+1} < \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$

=> $\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

=> $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$

=> $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}}$

b) D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \leqslant p_{n+1} \Rightarrow (p_n)$ est croissante

$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n < \frac{2}{3} \Rightarrow (p_n)$ est majorée (par $\frac{2}{3}$)

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(p_n) \text{ converge}}$ vers une limite $\ell \in \left[p_1 \,;\, \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{3} \,;\, \frac{2}{3}\right]$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = p_n - \frac{2}{3}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4} p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} \\ &= \frac{1}{4} p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4} p_n - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot u_n \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $\boxed{q = \frac{1}{4}}$

et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3} \times 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\Leftrightarrow u_n = -\frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = p_n - \frac{2}{3} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{2}{3} \Leftrightarrow p_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Comme $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times 0 = \boxed{\frac{2}{3}}$

Après un très grand nombre de déplacements, le robot se déplacera à droite 2 fois sur 3 en moyenne.

=> Partie C :

Notons X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de déplacements vers la droite.

On répète $n = 10$ fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "le robot se déplace à droite" est de $p = \frac{3}{4}$.

D'où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10 ; \frac{3}{4}\right)$

Pour que le robot revienne à son point de départ, il doit avoir fait autant de déplacements à droite que de déplacements à gauche.

Dans notre cas de 10 déplacements, le robot doit donc se déplacer exactement 5 fois à droite.

Ainsi, $P(X=5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-5}$ $\boxed{\approx 0{,}058}$ (à 10^{-3} près)

Ex 3 :

Rem : f est une fonction logistique et $\mathcal{C}_f$ est une sigmoïde

$\Rightarrow$ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{6}{1+5e^{-x}}$

1) $f(x_A) = \dfrac{6}{1+5\times e^{-x_A}} = \dfrac{6}{1+5e^{-\ln 5}} = \dfrac{6}{1+5\times\dfrac{1}{e^{\ln 5}}} = \dfrac{6}{1+5\times\frac{1}{5}} = \dfrac{6}{1+1} = 3$

On a : $f(x_A) = y_A$ et $x_A \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc $\boxed{A\begin{pmatrix}\ln 5\\ 3\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f}$

2) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0^+ \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{6}{1+5\times 0} = 6$

Donc la droite d'équation $y=6$ est $\boxed{\text{asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f}$ au voisinage de $+\infty$

3) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\quad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6\times\dfrac{-(0+5\times(-e^{-x}))}{(1+5e^{-x})^2} = \boxed{\dfrac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}}$

Rem : On peut détailler en notant $f(x) = 6\times\dfrac{1}{v(x)}$ et $v'(x) = 0+5\times(-e^{-x})$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $(1+5e^{-x})^2 > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 1+5e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	6

4) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{30.e^{-x}.(5e^{-x}-1)}{(1+5e^{-x})^3}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 30e^{-x} > 0$ et $1+5e^{-x} > 0 \Rightarrow (1+5e^{-x})^3 > 0$

Donc f'' est du signe de $5e^{-x}-1$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant 0 \iff 5e^{-x}-1 \geqslant 0$

$$\begin{aligned} &\iff 5e^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff e^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant -\ln 5 \\ &\iff x \leqslant \ln 5 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f		convexe	inflexion	concave	

Le point $\boxed{A\begin{pmatrix}\ln 5\\ 3\end{pmatrix} \text{ est donc l'unique point d'inflexion de } \mathcal{C}_f}$ car f'' s'annule et change de signe en $x_A = \ln 5$

ⓑ On a $f'(0) = \dfrac{30\times e^{-0}}{(1+5\times e^{-0})^2} = \dfrac{30\times 1}{(1+5\times 1)^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$ et $f(0) = \dfrac{6}{1+5\times e^{-0}} = \dfrac{6}{1+5\times 1} = \dfrac{6}{6} = 1$

La tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0) \iff y = \frac{5}{6}x+1$

Puis f est convexe sur $]-\infty ; \ln 5]$, donc $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle, notamment au-dessus de T_0.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]-\infty ; \ln 5],\ f(x) \geqslant \frac{5}{6}x+1}$

5) (a) Soit F_k : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_k(x) = k.\ln(e^x+5)$, $k \in \mathbb{R}$

La fonction $u : x \mapsto e^x+5$ est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc par composition par la fonction logarithme, F_k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k'(x) = k \times \frac{e^x}{e^x+5} = k\,\frac{\cancel{e^x} \times 1}{\cancel{e^x}(1+5e^{-x})} = \frac{k}{1+5e^{-x}}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

Puis F_k est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ F_k'(x) = f(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{k}{1+5e^{-x}} = \frac{6}{1+5e^{-x}}$$

Par identification, il faut que : $\boxed{k = 6}$

(b) D'après la question 3, f est positive sur $\mathbb{R}$

De plus, f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.

Donc l'aire $\mathcal{A}$ recherchée vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 5} f(x).\,dx = \Big[F_6(x)\Big]_0^{\ln 5} = \Big[6.\ln(e^x+5)\Big]_0^{\ln 5} = 6\,\Big[\ln(e^x+5)\Big]_0^{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = 6\left(\ln(e^{\ln 5}+5) - \ln(e^0+5)\right) = 6\left(\ln(5+5) - \ln(1+5)\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = 6\left(\ln(10) - \ln(6)\right) = 6\ \ln\left(\frac{10}{6}\right) = \boxed{6\ .\ \ln\left(\frac{5}{3}\right)}\ \ u.a.$$

$\Rightarrow$ Partie B : Soit (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \frac{1}{6}(f(x))^2 = f(x) \times \left(1 - \frac{1}{6} \cdot f(x)\right)$

$$= \frac{6}{1+5e^{-x}} \times \left(1 - \frac{1}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{1+5e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{6}{1+5e^{-x}} \times \frac{1+5e^{-x}-1}{1+5e^{-x}}$$

$$= \frac{6 \times 5e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$$

$$= \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$$

$$= f'(x)$$

Donc $\boxed{f \text{ est une solution de } (E).}$

2) $x \longmapsto \frac{1}{6}$ est solution particulière de l'éq. diff. $y' = -y + \frac{1}{6}$

et la solution générale de l'éq. diff. homogène associée $y' = -y$ est :

$x \longmapsto \lambda . e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ a pour solution générale :

$$\boxed{x \longmapsto \lambda e^{-x} + \frac{1}{6}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

Puis h solution de $y' = -y + \frac{1}{6}$ $\Rightarrow h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow -g'(x) = -\frac{(g(x))^2}{g(x)} + \frac{1}{6}(g(x))^2$$

$$\Rightarrow -g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}(g(x))^2$$

$$\Rightarrow g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}(g(x))^2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ est solution de } (E)}$

b) $\forall m \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_m(x) = \dfrac{6}{1+6m.e^{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0 \Rightarrow 6m.e^{-x} \geqslant 0$ car $m \geqslant 0$

$\Rightarrow 1 + 6m.e^{-x} \geqslant 1 > 0$

$\Rightarrow g_m(x) > 0$

Donc on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $h_m : x \longmapsto \dfrac{1}{g_m(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)} = \dfrac{1+6me^{-x}}{6} = \dfrac{1}{6} + m.e^{-x}$, $m \in \mathbb{R}_+$

D'après la question 2, on reconnait que h_m est solution de $y' = -y + \frac{1}{6}$

Donc d'après la question précédente : $\boxed{\forall m \geqslant 0,\ g_m \text{ est solution de } (E).}$

__Rem:__ On pouvait aussi calculer séparément $g_m'(x)$ et $g_m(x) - \frac{1}{6}(g_m(x))^2$ pour montrer que ces deux expressions sont égales, mais ce n'était pas ce vers quoi nous amenait l'exercice dans sa conception.

Ex 4 :

1) VRAIE

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}05\,u_n + 3$

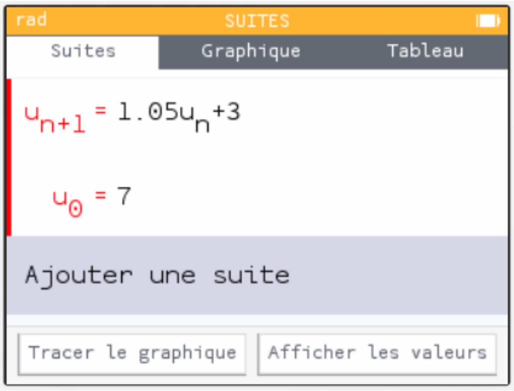
Le script "seuil (S)" renvoie le plus petit rang à partir duquel $u_n \geqslant S$, avec S entré en argument.

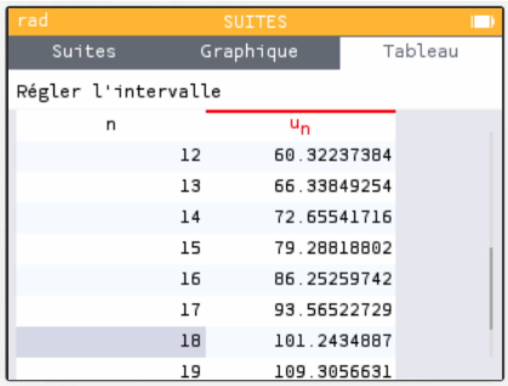
On peut facilement voir (sans réelle démonstration) que (u_n) est strictement croissante.

En effet, on part d'une valeur $u_0 = 7$ strictement positive, puis chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par $1{,}05 > 1$ et en ajoutant $3 > 0$.

En saisissant le script sur la calculatrice, on obtient $u_{17} \approx 94 < 100$ et $u_{18} \approx 101 > 100$.

Le rang $n = 18$ est bien le plus petit rang à partir duquel $u_n \geqslant 100$.





n	u_n
12	60.32237384
13	66.33849254
14	72.65541716
15	79.28818802
16	86.25259742
17	93.56522729
18	101.2434887
19	109.3056631

```python
def seuil(S):
    n=0
    u=7
    while u<S:
        n=n+1
        u=1.05*u+3
    return(n)
```

```
>>> seuil(100)
18
```

La justification précédente consistant à interpréter le sujet en introduisant la suite (u_n) devrait suffire au bac. Pour les plus aguerris, voici un complément de justification utilisant la forme explicite de (u_n) :

Soit $f : x \mapsto 1,05x + 3$ la fonction associée à (u_n), et déterminons ses éventuels pts fixes (il n'y en a qu'un puisque (u_n) est arithmético-géométrique) :

$f(x) = x \iff 1,05x + 3 = x \iff 0,05x = -3 \iff x = -60$

Puis introduisons (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_n - (-60) = u_n + 60$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1,05u_n + 3 + 60 = 1,05u_n + 63 = 1,05(u_n + 60) = 1,05\, v_n$

D'où (v_n) géométrique de raison $q = 1,05$ et $v_0 = u_0 + 60 = 67$: $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = 67 \times (1,05)^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = v_n - 60 = 67 \times (1,05)^n - 60$ qui est bien strict. croissante car $67 > 0$ et $1,05 > 1$

Enfin, $u_n \geqslant 100 \iff 67 \times 1,05^n - 60 \geqslant 100 \iff 1,05^n \geqslant \frac{160}{67} \iff n \ln(1,05) \geqslant \ln\left(\frac{160}{67}\right)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{160}{67}\right)}{\ln(1,05)}$ car $\ln(1,05) > 0$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{160}{67}\right)}{\ln(1,05)} \approx 17,84$ et on veut $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 18$

$\boxed{\text{2) VRAIE}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{1 - 0,2^{n+1}}{\frac{4}{5}}$

$\iff S_n = \frac{5}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

On a $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5} \times 0\right) = \frac{5}{4}$

Rem : (S_n) est une série géométrique, un grand classique de Bac+1.

$\boxed{\text{3) FAUSSE}}$

L'ordre n'a pas d'importance et la répétition n'est pas autorisée.

Il s'agit donc d'une combinaison de 2 élèves parmi 30 :

$\binom{30}{2} = \dfrac{30!}{2! \times (30-2)!} = \dfrac{30!}{2 \times 28!} = \dfrac{\overset{15}{\cancel{30}} \times 29 \times \cancel{28!}}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \cancel{28!}} = 15 \times 29 = 435 \neq 870$

4) VRAIE

La fonction $f : x \longmapsto x.(\ln x)^2$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[1;+\infty[$

$\forall x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$

$= (\ln x)^2 + 2\ln x$

$= (2+\ln x) \times \ln x$

Puis $\begin{cases} \forall x \in [1;+\infty[, \ 2+\ln x > 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[, \ \ln x > 0 \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in]1;+\infty[, \ f'(x) > 0 \\ \text{et } f'(1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f est <u>strictement</u> croissante sur $[1;+\infty[$

Par ailleurs, on a :

$f(1) = 1 \times (\ln 1)^2 = 1 \times 0^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On a donc f continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1;+\infty[$

$f([1;+\infty[) = [f(1) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [0;+\infty[$

Comme $1 \in f([1;+\infty[)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists ! \, \alpha \in [1;+\infty[$, $f(\alpha) = 1$

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[1;+\infty[$

$\boxed{5)\ \text{VRAIE}}$

On veut calculer $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$

Procédons par intégration par parties (IPP) en posant :

$$\left.\begin{array}{lll} u(x) = x & \text{et} & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & \text{et} & v(x) = -e^{-x} \end{array}\right)$$ u et v sont continûment dérivables sur $[0\,;1]$

D'où $\displaystyle\int_0^1 x.e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 1 \times dx$

$$= -1 \times e^{-1} + 0 \times e^{-0} - \left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} - \left(e^{-1} - e^{-0}\right)$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

$$= \frac{e-2}{e}$$