Ex 1 :

1) (a) Dans le R.O.N. $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a :

$$\boxed{D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \; ; \; B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; ; \; I\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

(b) On a $\vec{IL} = \frac{3}{4}\vec{IG} \iff \begin{cases} x_L - x_I = \frac{3}{4}(x_G - x_I) \\ y_L - y_I = \frac{3}{4}(y_G - y_I) \\ z_L - z_I = \frac{3}{4}(z_G - z_I) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x_L = x_I + \frac{3}{4}(x_G - x_I) \\ y_L = y_I + \frac{3}{4}(y_G - y_I) \\ z_L = z_I + \frac{3}{4}(z_G - z_I) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ y_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ z_L = 0 + \frac{3}{4}(1 - 0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ y_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ z_L = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L = \frac{7}{8} \\ y_L = \frac{7}{8} \\ z_L = \frac{3}{4} \end{cases}$$

D'où on a bien $\boxed{L\begin{pmatrix}7/8\\7/8\\3/4\end{pmatrix}}$

2) $\begin{cases} x_B + y_B - z_B - 1 = 1+0-0-1 = 0 \\ x_D + y_D - z_D - 1 = 0+1-0-1 = 0 \\ x_G + y_G - z_G - 1 = 1+1-1-1 = 0 \end{cases}$

les coordonnées des points B, D et G vérifient l'équation $x+y-z-1=0$

Donc $\boxed{x+y-z-1=0 \text{ est bien une équation cartésienne du plan } (BDG)}$

3) ⓐ D'après la question précédente, on déduit que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (BDG).

Comme $\Delta \perp (BDG)$, $\vec{n}$ normal au plan (BDG) dirige Δ.

Puis Δ passe par $L\begin{pmatrix}7/8\\7/8\\3/4\end{pmatrix}$.

Donc Δ est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tq $\overrightarrow{LM} = t \times \vec{n}$, $t \in \mathbb{R}$

i.e. $\begin{cases} x - \frac{7}{8} = 1 \times t \\ y - \frac{7}{8} = 1 \times t \\ z - \frac{3}{4} = -1 \times t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ i.e. $\boxed{\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ non colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Donc (AE) et Δ sont soit sécantes, soit non coplanaires.

On a : $(AE)\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Puis $(AE) \cap \Delta$: $\begin{cases} \frac{7}{8} + t = 0 \\ \frac{7}{8} + t = 0 \\ \frac{3}{4} - t = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{7}{8} \\ t = -\frac{7}{8} \\ \lambda = \frac{3}{4} - \frac{-7}{8} = \frac{13}{8} \end{cases}$ compatibles

Donc (AE) et Δ sont sécantes au pt de paramètre $\begin{cases} t = -\frac{7}{8} \text{ de } \Delta \\ \lambda = \frac{13}{8} \text{ de } (AE) \end{cases}$

D'où $\boxed{(AE) \cap \Delta = \left\{ K\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{8} \end{pmatrix} \right\}}$

ⓒ On a : $\begin{cases} L \in \Delta \\ K \in \Delta \\ \Delta \perp (BDG) \end{cases}$

De plus, $L \in (BDG)$ car $x_L + y_L - z_L - 1 = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{4}{4} - 1 = 0$

D'où $\boxed{\text{L est le projeté orthogonal de K sur (BDG).}}$

4) ⓐ Dans le R.O.N., on a $K\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13/8 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ -7/8 \end{pmatrix}$

Puis $KL = \|\overrightarrow{KL}\| = \sqrt{\overrightarrow{KL}^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{-7}{8}\right)^2} = \sqrt{3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \boxed{\frac{7\sqrt{3}}{8}}$ u.l.

ⓑ On admet que DBG est équilatéral, et on a I milieu de [BD]

Donc $\mathcal{A}_{BDG} = \frac{1}{2} BD \times IG$ car (IG) est médiatrice et hauteur de BDG relative à la base [BD].

Dans le R.O.N., on a $I\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} IG = \|\overrightarrow{IG}\| = \sqrt{\overrightarrow{IG}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u.l.} \\ BD = \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{\overrightarrow{BD}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \text{ u.l.} \end{cases}$

Finalement, $\mathcal{A}_{BDG} = \frac{1}{2} BD \times IG = \frac{1}{2} \times \cancel{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}}$

c) Comme L est le projeté orthogonal de K sur (BDG), [KL] est la hauteur du tétraèdre KDBG issue de K, donc relative à la base BDG.

Ainsi, $\mathcal{V}_{KDBG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BDG} \times KL = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{8} = \boxed{\frac{7}{16} \text{ u.v.}}$

5) a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $K_a\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$

Donc $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $K_a \in (AE)$

Comme $(AE) \perp (ABD)$, $[AK_a]$ est la hauteur de la pyramide $ABCDK_a$ relative à la base carrée ABCD.

D'où $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{V}_a = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times AK_a$

$$= \frac{1}{3} \times AB \times AD \times \sqrt{0^2+0^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times |a|$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \times a} \text{ u.v.} \quad \text{car } a>0$$

b) Etudions $(BDG) \cap \Delta_a$:

$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x=t' \\ y=t' \\ z=-t'+a \end{cases} \Rightarrow t'+t'-(-t'+a)-1=0$$

$$\Rightarrow 2t'+t'-a-1=0$$

$$\Rightarrow 3t'=a+1$$

$$\Rightarrow t'=\frac{a+1}{3}$$

Puis $\begin{cases} x=t' \\ y=t' \\ z=-t'+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a+1}{3} \\ y=\frac{a+1}{3} \\ z=a-\frac{a+1}{3}=\frac{3a-a-1}{3}=\frac{2a-1}{3} \end{cases}$

D'où $\boxed{(BDG) \cap \Delta_a = \left\{ L_a\begin{pmatrix}\frac{a+1}{3}\\ \frac{a+1}{3}\\ \frac{2a-1}{3}\end{pmatrix} \right\}}$

c) Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ dirige Δ_a, on a $\Delta_a \perp (BDG)$

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $V_{GBDK_a} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BDG} \times K_aL_a$

car $[K_aL_a]$ est la hauteur du tétraèdre $GBDK_a$ relative à la base BDG

On a : $\forall a > 0$, $\overrightarrow{K_aL_a}\begin{pmatrix}\frac{a+1}{3}\\ \frac{a+1}{3}\\ -\frac{(a+1)}{3}\end{pmatrix}$ car $K_a\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$ et $L_a\begin{pmatrix}\frac{a+1}{3}\\ \frac{a+1}{3}\\ \frac{2a-1}{3}\end{pmatrix}$

Puis $K_aL_a = \|\overrightarrow{K_aL_a}\| = \sqrt{\overrightarrow{K_aL_a}^2} = \sqrt{\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{(a+1)}{3}\right)^2}$

$\Leftrightarrow K_aL_a = \sqrt{3 \times \left(\frac{a+1}{3}\right)^2} = \left|\frac{a+1}{3}\right| \times \sqrt{3} \underset{\text{car } a>0}{=} \frac{a+1}{3} \times \sqrt{3}$ u.l.

Finalement, $V_{GBDK_a} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \times \frac{a+1}{\cancel{3}} \times \cancel{\sqrt{3}} = \frac{a+1}{6}$ u.v.

Enfin, il reste à résoudre une équation :

Soit $a > 0$, $V_{GBDK_a} = V_a \Leftrightarrow \frac{a+1}{6} = \frac{a}{3}$

$\Leftrightarrow 3(a+1) = 6a$

$\Leftrightarrow 3a + 3 = 6a$

$\Leftrightarrow 3a = 3$

$\Leftrightarrow a = 1 > 0$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$

Ex 2 :

⇒ Partie A : $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) = (1-x^2).e^x$

1) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ ⇒ $\forall x \in [-1;1]$, $e^x > 0$

Donc f est du signe de $1-x^2$ sur $[-1;1]$

Or -1 et 1 sont les deux racines du polynôme du second degré $1-x^2$.

Ce polynôme étant concave (coefficient dominant négatif), il est négatif partout sauf entre ses racines. D'où $\forall x \in [-1;1]$, $1-x^2 \geqslant 0$

Ainsi, on a : $\forall x \in [-1;1]$, $\begin{cases} e^x > 0 \\ 1-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ ⇒ $\boxed{f(x) \geqslant 0}$

ⓑ Calculons à l'aide d'une IPP $\int_{-1}^{1} f(x).dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2).e^x.dx$

On pose : $u(x) = 1-x^2$ $\quad v'(x) = e^x$
$u'(x) = -2x$ $\quad v(x) = e^x$
u et v sont continûment dérivables sur $[-1;1]$

D'où $\int_{-1}^{1} f(x).dx = \left[(1-x^2).e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2x.e^x.dx$

$= (1-1^2).e^1 - (1-(-1)^2).e^1 + 2.\int_{-1}^{1} x.e^x\,dx$

$= 0 - 0 + 2.\int_{-1}^{1} x.e^x.dx$

$= \boxed{2\int_{-1}^{1} x.e^x.dx}$

2) La fonction f étant positive sur $[-1;1]$, la surface colorée correspond à $\int_{-1}^{1} f(x).dx$ car cette surface est délimitée par $(O;\vec{\imath})$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.

Ainsi, $S = \int_{-1}^{1} f(x).dx = 2\int_{-1}^{1} x.e^x.dx$

Utilisons une seconde IPP pour calculer $\int_{-1}^{1} x.e^x.dx$

On pose $u(x) = x$ $\quad v'(x) = e^x$
$\quad\quad u'(x) = 1$ $\quad v(x) = e^x$ avec u et v continûment dérivables sur $[-1;1]$

Puis $\int_{-1}^{1} x.e^x dx = \left[x.e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1\times e^x.dx$

$$= 1\times e^1 - (-1)\times e^{-1} - \int_{-1}^{1} e^x dx$$

$$= e^1 + e^{-1} - \left[e^x\right]_{-1}^{1}$$

$$= e + e^{-1} - (e^1 - e^{-1})$$

$$= \cancel{e} + e^{-1} - \cancel{e} + e^{-1}$$

$$= 2.e^{-1}$$

D'où $S = 2\int_{-1}^{1} x.e^x.dx = 2\times 2e^{-1} = 4e^{-1}$ (cm²)

Puis $V = 3\times S = 3\times 4.e^{-1} = 12e^{-1}$ (cm³)

$\boxed{\simeq 4,4 \text{ cm}^3}$ (à 0,1 cm³ près)

⇒ Partie B : $\forall q \in [0{,}01\,;+\infty[\,,\ B(q) = 8q^2(2-3\ln q)-3$

1) ⓐ On a d'une part $\lim\limits_{q\to+\infty} q^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty} 8q^2 = +\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{q\to+\infty} \ln q = +\infty$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty} -3\ln q = -\infty$

puis $\lim\limits_{q\to+\infty} 2-3\ln q = -\infty$

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{q\to+\infty} 8q^2(2-3\ln q) = -\infty$

Enfin, par somme, $\boxed{\lim\limits_{q\to+\infty} B(q) = -\infty}$

ⓑ On admet dans l'énoncé que B est dérivable sur $[0{,}01\,;+\infty[$.

Ainsi, $\forall q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8\times 2q\times(2-3\ln q) + 8q^2\times\left(0-3\times\frac{1}{q}\right)+0$

$= 8\times 2q\,(2-3\ln q) - 8q^{\cancel{2}}\times\frac{3}{\cancel{q}}$

$= 8q\,(4-6\ln q) - 8q\times 3$

$= 8q\,(4-6\ln q-3)$

$= \boxed{8q\,(1-6\ln q)}$

ⓒ $\forall q \geqslant 0{,}01$, $8q > 0$ donc B' est du signe de $1-6\ln q$

Soit $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) \geqslant 0 \iff 1-6\ln q \geqslant 0$

$\iff 6\ln q \leqslant 1$

$\iff \ln q \leqslant \frac{1}{6}$

$\iff q \leqslant e^{1/6}$ (par stricte croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$)

On a $B(0{,}01) = 8 \times (10^{-2})^2 \times (2 - 3\ln 0{,}01) - 3$

$= 8 \times 10^{-4} \times (2 - 3\ln 0{,}01) - 3$

$\simeq -2{,}987$ (à 10^{-3} près)

et $B\left(e^{1/6}\right) = 8 \times \left(e^{1/6}\right)^2 \times \left(2 - 3\ln\left(e^{1/6}\right)\right) - 3$

$= 8 \times e^{2 \times \frac{1}{6}} \times \left(2 - 3 \times \frac{1}{6}\right) - 3$

$= 8 \times e^{1/3} \times \left(2 - \frac{1}{2}\right) - 3$

$= 8 \times e^{1/3} \times \frac{3}{2} - 3$

$= 12e^{1/3} - 3$

$\simeq 13{,}747$ (à 10^{-3} près)

D'où le tableau de variations complet :

q	$0{,}01$		$e^{1/6}$		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	$B(0{,}01)$	$\nearrow$	$12e^{1/3} - 3$	$\searrow$	$-\infty$

(d) D'après le tableau précédent, B' s'annule et change de signe (+ vers −) en $e^{1/6}$, donc B admet un maximum en $e^{1/6}$ qui vaut :

$\boxed{B\left(e^{1/6}\right) \simeq 137 \text{ euros}}$ (à l'euro près) car B est exprimé en dizaines d'euros.

2) a) B est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[e^{1/6} ; +\infty[$

Comme $e^{1/6} \simeq 1,18$, on a : $[1,2 ; +\infty[\subset [e^{1/6} ; +\infty[$

Ainsi B est <u>continue</u> et <u>strictement décroissante</u> sur $[1,2 ; +\infty[$

On a : $B(1,2) \simeq 13,7 > 10$ et $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q) = -\infty$

Donc $10 \in \left]\lim\limits_{q \to +\infty} B(q) ; B(1,2)\right]$ i.e. $10 \in B\left([1,2 ; +\infty[\right)$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } B(q) = 10 \text{ admet une unique solution } \beta \text{ sur } [1,2 ; +\infty[}$

Puis par balayage :

$B(1,5) > 10$ et $B(1,6) < 10$ donc $\beta \in]1,5 ; 1,6[$

puis $B(1,55) > 10$ et $B(1,56) < 10$ donc $\beta \in]1,55 ; 1,56[$

puis $B(1,558) > 10$ et $B(1,559) < 10$ donc $\beta \in]1,558 ; 1,559[$

puis $B(1,5583) > 10$ et $B(1,5584) < 10$ donc $\beta \in]1,5583 ; 1,5584[$

D'où $\boxed{\beta \simeq 1,558}$ (à 10^{-3} près)

b) $B = 10$ correspond à un bénéfice de 100 euros.

Sur $[0,01 ; 1,2]$, $B(q) = 10$ admet pour unique solution $\alpha \simeq 0,757$

Sur $[1,2 ; +\infty[$, $B(q) = 10$ admet pour unique solution $\beta \simeq 1,558$

Ainsi, d'après le tableau de variations, l'artisan doit vendre entre

$\boxed{\text{76 et 155 bonbons}}$ pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 €.

car q est exprimé en centaines de bonbons, et $\begin{cases} 100\alpha \simeq 75,7 < 76 \\ 100\beta \simeq 155,8 > 155 \end{cases}$

⚠ Il ne faut pas arrondir, mais choisir pour intervalle :

$[E(100\alpha)+1 ; E(100\beta)]$

Ex 3 :

1) $\boxed{\text{Affirmation 1 : VRAIE}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = -0,8 t_n + 18$ et $w_n = t_n - 10$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = t_{n+1} - 10$

$$= -0,8.t_n + 18 - 10$$

$$= -0,8.t_n + 8$$

$$= -0,8.t_n + 0,8 \times 10$$

$$= 0,8\,(-t_n + 10)$$

$$= -0,8\,(t_n - 10)$$

$$= -0,8.w_n$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $q = -0,8$

2) $\boxed{\text{Affirmation 2 : VRAIE}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$ et $u_n = \frac{S_n}{n}$

D'où $\frac{3n-4}{n} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{3n+4}{n}$

i.e. $3 - \frac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{4}{n}$

Or on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n} = 0$

Donc d'après le théorème d'encadrement (th. des gendarmes),

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ donc (u_n) converge

3) $\boxed{\text{Affirmation 3 : VRAIE}}$

Soit (v_n) : $v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}$

Le calcul des premiers termes de (v_n) à l'aide des deux expressions fournies ne permet pas d'obtenir de contre-exemples. On peut donc conjecturer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n+1}{n}$. Démontrons maintenant cette propriété (que nous notons $\mathcal{P}(n)$) par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 1$, $\frac{n+1}{n} = \frac{1+1}{1} = 2 = v_1$ $\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, supposons que $v_n = \frac{n+1}{n}$ et mq $v_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$$v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)-n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n+1}{n}$

4) $\boxed{\text{Affirmation 4 : FAUSSE}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^n - n = n\left(\frac{e^n}{n} - 1\right)$

Or on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ (th. croissances comparées)

D'où par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} - 1 = +\infty$

Puis par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc (u_n) diverge

5) $\boxed{\text{Affirmation 5 : VRAIE}}$

Le script Python permet de dire que : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

De plus, on admet que $\begin{cases} (u_n) \text{ est décroissante} \\ (u_n) \text{ est minorée par } \sqrt{2} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge vers un réel $l \in [\sqrt{2} ; 2]$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie et <u>continue</u> sur $[\sqrt{2} ; 2]$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

⚠ Ne pas oublier

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation :

$$
\begin{aligned}
f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x} = 2x \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{2}{x} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad x \neq 0
\end{aligned}
$$

Or on sait que $l \in [\sqrt{2} ; 2]$, d'où $l = \sqrt{2}$

Donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

<u>Rem 1:</u> Ne pas oublier de justifier que (u_n) converge <u>avant</u> de résoudre $f(x) = x$

<u>Rem 2:</u> Il s'agit de la suite de Héron : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n)$ converge vers $\sqrt{a}$

Ex 4 :

⇒ Partie A :

1) On répète $n = 100$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " le cachet n'est pas conforme " est égale à $p = 0{,}02$.
D'où N suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$

$$\boxed{N \sim \mathcal{B}(100\,;\,0{,}02)}$$

2) Comme $N \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}02)$, on a :

$$E(N) = n \times p = 100 \times 0{,}02 = \boxed{2}$$

Interprétation : En moyenne, 2 cachets par boîte de 100 ne sont pas conformes.

3) a) $P(N=3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1-0{,}02)^{100-3}$

$$= 161\,700 \times 8 \times 10^{-6} \times 0{,}98^{97}$$

$$\boxed{\simeq 0{,}182} \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près})$$

b) $P(\bar{N} \geqslant 95) = P(100 - N \geqslant 95)$

$$= P(-N \geqslant -5)$$

$$= P(N \leqslant 5)$$

$$\boxed{\simeq 0{,}985} \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près})$$

en utilisant la fonction de répartition de la calculatrice.

4) Désormais, $N \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}02)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

On veut $P(N=0) \geqslant 0{,}5$

$\iff \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times (1-0{,}02)^{n-0} \geqslant 0{,}5$

$\iff 1 \times 1 \times 0{,}98^n \geqslant 0{,}5$

$\iff 0{,}98^n \geqslant 0{,}5$

$\iff \ln(0{,}98^n) \geqslant \ln \frac{1}{2}$ car ln est strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n . \ln 0{,}98 \geqslant -\ln 2$

$\iff n \leqslant \dfrac{-\ln 2}{\ln 0{,}98}$ car $\ln(0{,}98) < 0$

Or on a $\dfrac{-\ln 2}{\ln 0{,}98} \simeq 34{,}3$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$ tq $n \leqslant \dfrac{-\ln 2}{\ln 0{,}98}$

⚠ Troncature

Donc une boîte doit contenir au maximum $\boxed{n = 34}$ cachets pour respecter le critère.

⇒ Partie B :

1) On a $S = \sum_{k=1}^{100} M_k$ et $\forall k \in [\![1\,;100]\!]$, $E(M_k) = \mu = 2$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{100} M_k\right) = \sum_{k=1}^{100} E(M_k) = \sum_{k=1}^{100} \mu = (100-1+1) \times \mu = 100 \times 2 = \boxed{200}$$

ou $E(S) = E(M_1 + M_2 + \dots + M_{100}) = E(M_1) + E(M_2) + \dots + E(M_{100}) = \mu + \mu + \dots + \mu = 100\mu = 200$

Interprétation : En moyenne, la masse de 100 cachets est de 200 g

2) Pour tous $k \in [\![1;100]\!]$, les variables aléatoires M_k sont <u>indépendantes</u>.

Donc $V(S) = V\left(\sum_{k=1}^{100} M_k\right) = \sum_{k=1}^{100} V(M_k) = \sum_{k=1}^{100} \sigma^2(M_k) = \sum_{k=1}^{100} \sigma^2$

or $V(S) = \sigma^2(S) = s^2$

D'où $s^2 = \sum_{k=1}^{100} \sigma^2 \iff s^2 = (100-1+1).\sigma^2$

$\iff s^2 = 100.\sigma^2$

$\iff s^2 = 10^2.\sigma^2$

$\iff s^2 = (10\sigma)^2$

Comme $s \geqslant 0$, on a donc $\boxed{s = 10\sigma}$

3) ⓐ On veut : $P(199 < S < 201) \geqslant 0,9$

$\iff P(200-1 < S < 200+1) \geqslant 0,9$

$\iff P(-1 < S-200 < 1) \geqslant 0,9$

$\iff P(|S-200| < 1) \geqslant 0,9$

$\iff 1 - P(|S-200| \geqslant 1) \geqslant 0,9$

$\iff -P(|S-200| \geqslant 1) \geqslant 0,9-1$

$\iff -P(|S-200| \geqslant 1) \geqslant -0,1$

$\iff \boxed{P(|S-200| \geqslant 1) \leqslant 0,1}$

ⓑ En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec la variable aléatoire S et pour $\delta = 1$, on a : $P(|S-E(S)| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{V(S)}{1^2}$

$\iff P(|S-200| \geqslant 1) \leqslant 100\sigma^2$ car $V(S) = s^2 = (10\sigma)^2$

En utilisant la question ⓐ, par transitivité, on a :

$100\sigma^2 \leqslant 0,1 \iff \sigma^2 \leqslant 10^{-3} \iff \sigma \leqslant \sqrt{10^{-3}}$ car $\sigma \geqslant 0$

Donc la valeur maximale de σ pour assurer cette condition est : $\boxed{\sqrt{0,001} = \dfrac{\sqrt{10}}{100}}$