Ex1 :

$\boxed{\text{Affirmation 1 : Fausse}}$

La fonction $f : x \longmapsto e^{2x} - 6x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2e^{2x} - 6$

Puis $f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 6 - 2\left(e^{2x} - 6x + 1\right)$

$= \cancel{2e^{2x}} - 6 - \cancel{2e^{2x}} + 12x - 2$

$= 12x - 8$

$\neq -6x + 1$

$\boxed{\text{Affirmation 2 : Fausse}}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$$

$$= 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{3}{4} \times \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3}{4} \times 0 = 0$

Enfin, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4(1 - 0) = 4 \times 1 = 4$

$\boxed{\text{Affirmation 3 : Fausse}}$

L'instruction " S = S + (3/4)**k " va ajouter des $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$ à S, alors que l'on souhaiterait ajouter $\left(\frac{3}{4}\right)^1$, puis $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, puis $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, ...

En remplaçant "k" par "i" à la ligne 4, on obtient alors u_{50} en lançant "suite(51)".

$\boxed{\text{Affirmation 4 : Vraie}}$

On veut $f'(1) = 0$, i.e. coeff directeur nul de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}_+{}^*$ par opérations sur la dérivation.

$\forall x \in \mathbb{R}_+{}^*$, $f'(x) = a \times \frac{1}{x} - 2$

D'où $f'(1) = 0 \iff a \times \frac{1}{1} - 2 = 0$

$\iff a - 2 = 0$

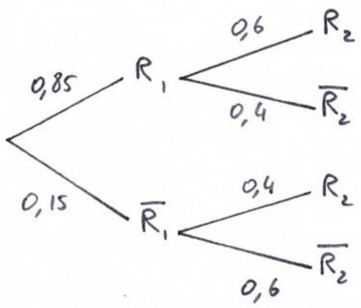
$\iff a = 2$

Donc $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $f'(1) = 0$

Ex 2 :

$\Rightarrow$ Partie A :

1)



2) $\{R_1 ; \overline{R_1}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la loi des probabilités totales,

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$$
$$= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2)$$
$$= 0,85 \times 0,6 + 0,15 \times 0,4$$
$$= 0,51 + 0,06$$
$$= 0,57$$

3) $P_{R_2}(\overline{R_1}) = \dfrac{P(\overline{R_1} \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{0,06}{0,57} = \dfrac{6}{57} = \dfrac{2}{19}$

4) a) On a :

$P(Z=0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = 0,15 \times 0,6 = 0,09$

$P(Z=2) = P(R_1 \cap R_2) = 0,51$ (cf q2)

$P(Z=1) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=2)) = 1 - (0,09 + 0,51) = 1 - 0,6 = 0,4$

D'où la loi de probabilité de Z :

z_k	0	1	2
$P(Z=z_k)$	0,09	0,4	0,51

ⓑ $E(Z) = 0 \times 0{,}09 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}51$

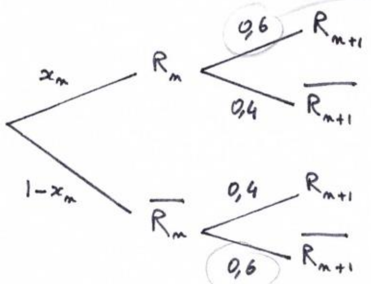
$= 0 + 0{,}4 + 1{,}02$

$= \boxed{1{,}42}$

Interprétation : En moyenne, sur un très grand nombre de services, le joueur réussira 142 services sur 200 lors de ses 2 premiers services.

⇒ Partie B : On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(R_n) = x_n$

1) ⓐ



on lit :

$P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}6$

$P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 0{,}6$

ⓑ $\{R_n ; \overline{R_n}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$P(R_{n+1}) = P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n \times 0{,}6 + (1-x_n) \times 0{,}4$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = 0{,}6\, x_n - 0{,}4\, x_n + 0{,}4$

$\Leftrightarrow \boxed{x_{n+1} = 0{,}2\, x_n + 0{,}4}$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = x_n - 0{,}5$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = x_{n+1} - 0{,}5$

$$= 0{,}2\, x_n + 0{,}4 - 0{,}5$$
$$= 0{,}2\, x_n - 0{,}1$$
$$= 0{,}2\, x_n - 0{,}2 \times 0{,}5$$
$$= 0{,}2\,(x_n - 0{,}5)$$
$$= 0{,}2\, u_n$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est géométrique}}$ de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme

$u_1 = x_1 - 0{,}5 = P(R_1) - 0{,}5 = 0{,}85 - 0{,}5 = 0{,}35$

b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$$= \boxed{0{,}35 \times 0{,}2^{n-1}}$$
$$= 0{,}35 \times \frac{0{,}2^n}{0{,}2}$$
$$= 0{,}35 \times 5 \times 0{,}2^n$$
$$= \boxed{1{,}75 \times 0{,}2^n}$$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*},\ u_n = x_n - 0{,}5 \iff x_n = u_n + 0{,}5$

$$\iff \boxed{x_n = 1{,}75 \times 0{,}2^n + 0{,}5}$$

Puis $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$

Par produit et somme, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1{,}75 \times 0 + 0{,}5 = 0{,}5$

c) Si le joueur s'entraîne à servir pendant une très longue durée, il tendra à réussir 1 service sur 2 lors de ses derniers services.

Ex 3:

→ Partie I :

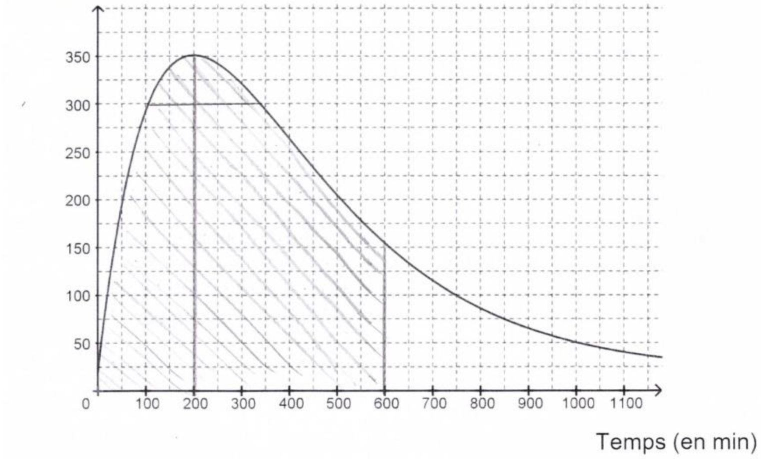
1) La température maximale (légèrement supérieure à 350°C) est atteinte au bout de $\boxed{200 \text{ minutes}}$, i.e. $\boxed{3\text{h et } 20 \text{ minutes.}}$

2) La température de 300°C est atteinte une première fois vers la minute 105 puis une seconde fois vers la minute 340. La température à l'intérieur du foyer dépasse 300°C pendant environ $340 - 105 = \boxed{235 \text{ minutes}}$

3) $\frac{1}{600}\int_0^{600} f(t)\,dt$ correspond à la valeur moyenne de f entre $t = 0$ min et $t = 600$ min.

Il y a environ 124 carreaux entre $\mathcal{C}_f$, $(O;\vec{\imath})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 600$. Ce nombre s'obtient en comptant les carreaux complets et en recomposant des carreaux à partir des incomplets.
Ce nombre de 124 carreaux est évidemment approximatif.
Puis l'unité d'aire (aire d'un carreau) est de $25 \times 50 = 1250$
D'où $\frac{1}{600} \times \int_0^{600} f(t)\,dt \simeq \frac{1}{600} \times 124 \times 1250 \boxed{\simeq 258}$

Interprétation : la température moyenne à l'intérieur du foyer lors des 600 premières minutes est d'environ 258 °C.



⇒ Partie II : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = 10.t.e^{-0,01t} + 20$

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$ est une F.I. du type "$0 \times \infty$"

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = \dfrac{10t}{e^{0,01t}} + 20 = 1000 \times \dfrac{0,01t}{e^{0,01t}} + 20$

Puis on a $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} 0,01t = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \end{cases}$ ⇒ Par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{0,01t}}{0,01t} = +\infty$

Par passage à l'inverse, on obtient : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{0,01t}{e^{0,01t}} = 0^+$

Enfin, par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1000 \times 0 + 20 = \boxed{20}$

2) ⓐ La fonction $t \mapsto e^{-0,01t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle. Puis g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur la dérivabilité.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) &= 10 \times e^{-0,01t} + 10t \times \left(-0,01.e^{-0,01t}\right) + 0 \\ &= 10 \times e^{-0,01t} - 0,1 \times t \times e^{-0,01t} \\ &= \boxed{(10 - 0,1t) \cdot e^{-0,01t}} \end{aligned}$$

ⓑ $\forall t \in \mathbb{R}_+, \; e^{-0,01t} > 0$ donc g' est du signe de $10 - 0,1t$ sur $\mathbb{R}_+$

Soit $t \in \mathbb{R}_+, \; g'(t) \geqslant 0 \iff 10 - 0,1t \geqslant 0 \iff 0,1t \leqslant 10 \iff t \leqslant 100$

t	0		100		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	20	↗	$\dfrac{1000}{e} + 20$	↘	20

$g(0) = 10 \times 0 \times e^{-0,01 \times 0} + 20$
$= 0 + 20$
$= 20$

$g(100) = 10 \times 100 \times e^{-0,01 \times 100} + 20$
$= 1000 \times e^{-1} + 20$

3) Procédons par disjonction de cas :

* sur $[0;100]$: g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u> sur $[0;100]$

On a $g(0) = 20 < 300$ et $g(100) = \frac{1000}{e} + 20 \simeq 388 > 300$

Ainsi, $300 \in [g(0) ; g(100)]$; i.e. $300 \in g([0;100])$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\exists ! \alpha \in [0;100]$, $g(\alpha) = 300$

* sur $]100 ; +\infty[$: g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u>

On a $g(100) = \frac{1000}{e} + 20 \simeq 388 > 300$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 20$

Ainsi, $300 \in \left] \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) ; g(100) \right[$

i.e. $300 \in g(]100 ; +\infty[)$ ⚠ ordre des bornes

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

l'équation $g(t) = 300$ admet une unique solution sur $]100;+\infty[$

* Conclusion : $\boxed{\text{L'équation } g(t) = 300 \text{ admet exactement 2 solutions } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

On obtient les valeurs approchées par balayage sur chaque intervalle :

* sur $[0;100]$: $g(40) < 300$ et $g(50) > 300$ donc $\alpha_1 \in]40;50[$

puis $g(43) < 300$ et $g(44) > 300$ donc $\alpha_1 \in]43;44[$

puis $g(43) < 300$ et $g(43{,}1) > 300$ donc $\alpha_1 \in]43;43{,}1[$

Donc $\boxed{\alpha_1 \simeq 43}$ à l'unité près

* sur $]100;+\infty[$: $g(190) > 300$ et $g(200) < 300$ donc $\alpha_2 \in]190;200[$

puis $g(193) > 300$ et $g(194) < 300$ donc $\alpha_2 \in]193;194[$

puis $g(193{,}1) > 300$ et $g(193{,}2) < 300$ donc $\alpha_2 \in]193{,}1;193{,}2[$

Donc $\boxed{\alpha_2 \simeq 193}$ à l'unité près

4) Calculons $I = \int_0^{600} g(t)\,dt = \int_0^{600} \left(10.t.e^{-0,01t} + 20\right) dt$

$= 10 \int_0^{600} t.e^{-0,01t}\,dt + \int_0^{600} 20\,dt$

$= 10 \times J + 20(600-0)$ en posant $J = \int_0^{600} t.e^{-0,01t}.dt$

$= 10 \times J + 12\,000$

Puis calculons $J = \int_0^{600} t.e^{-0,01t}.dt$ à l'aide d'une IPP.

On pose : $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-0,01t}$

$u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{-1}{0,01}.e^{-0,01t} = -100.e^{-0,01t}$

u et v sont continûment dérivables sur $[0;600]$

Puis $J = \left[-100.t.e^{-0,01t}\right]_0^{600} - \int_0^{600} -100\,e^{-0,01t} \times 1 \times dt$

$= -100 \times 600.e^{-0,01\times600} - 0 + 100 \times \int_0^{600} e^{-0,01t}.dt$

$= -60\,000.e^{-6} + 100 \times \left[-100\,e^{-0,01t}\right]_0^{600}$

$= -60\,000.e^{-6} - 10\,000 \times \left(e^{-0,01\times600} - e^{-0,01\times0}\right)$

$= -60\,000.e^{-6} - 10\,000\left(e^{-6} - 1\right)$

$= -70\,000\,e^{-6} + 10\,000$

Enfin, $I = 10 \times J + 12000 =$

$= 10 \times \left(-70\,000\,e^{-6} + 10000\right) + 12\,000$

$= \boxed{-700\,000\,e^{-6} + 112\,000}$

⇒ Partie III :

* Pour l'appareil A : On reprend les données de la partie I

→ critère 1 : $T_{max} \simeq 350\,°C > 320\,°C$ critère validé ✓

→ critère 2 : T_{max} est atteinte au bout de 3 h 20 min > 2 h critère non validé ×

→ critère 3 : $T_{moy\,10h} \simeq 258\,°C > 250\,°C$ critère validé ✓

→ critère 4 : $t_{sup\,300°C} \simeq 235$ min < 300 min (5 h) critère validé ✓

Conclusion : $\boxed{\text{L'appareil A obtient exactement 3 étoiles.}}$

* Pour l'appareil B : On reprend les données de la partie II

→ critère 1 : $T_{max} = \frac{1000}{e} + 20 \simeq 388\,°C > 320\,°C$ critère validé ✓

→ critère 2 : T_{max} est atteinte au bout de 100 min < 120 min (2 h) critère validé ✓

→ critère 3 : $T_{moy\,10h} = \frac{1}{600} \times I = \frac{1}{600}\left(112\,000 - 700\,000\,e^{-6}\right) \simeq 184\,°C < 250\,°C$

critère non validé ×

→ critère 4 : $t_{sup\,300°C} = |\alpha_2 - \alpha_1| = \alpha_2 - \alpha_1 \simeq 193 - 43 \simeq 150$ min < 300 min (5 h)

critère validé ✓

Conclusion : $\boxed{\text{L'appareil B obtient exactement 3 étoiles.}}$

Ex 4 :

1) Les deux avions volent à la même vitesse de $200\ m.s^{-1}$

Il suffit donc de montrer que $OA = BC$

Dans le R.O.N. $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}0\\200\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-33\\75\\44\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}87\\75\\-116\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\200\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}120\\0\\-160\end{pmatrix}$

Puis $OA = 200$

et
$$\begin{aligned} BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{120^2 + 0^2 + (-160)^2} &= \sqrt{14\,400 + 0 + 25\,600} \\ &= \sqrt{40\,000} \\ &= \sqrt{4 \times 10\,000} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{10\,000} \\ &= 2 \times 100 \\ &= 200 \end{aligned}$$

On a bien $OA = BC$

Donc l'avion 2 mettra autant de temps à parcourir $[BC]$ que l'avion 1 à parcourir $[OA]$

2) On a $[OA]$ dirigé par $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\200\\0\end{pmatrix}$ passant par $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

et $[BC]$ dirigé par $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}120\\0\\-160\end{pmatrix}$ passant par $B\begin{pmatrix}-33\\75\\44\end{pmatrix}$

D'où $[OA] : \begin{cases} x = 0 \\ y = 200t \\ z = 0 \end{cases}, t \in [0;1]$ et $[BC] : \begin{cases} x = -33 + 120\lambda \\ y = 75 \\ z = 44 - 160\lambda \end{cases}, \lambda \in [0;1]$

Etudions l'intersection (éventuelle) de $[OA]$ et $[BC]$, en vérifiant bien que l'on n'a pas choisi le même paramètre pour les deux segments, et en s'assurant que le couple $(t ; \lambda) \in [0;1]^2$.

$[OA] \cap [BC]$: $\begin{cases} -33+120\lambda = 0 \\ 200t = 75 \\ 44-160\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 120\lambda = 33 \\ t = \frac{75}{200} \\ 160\lambda = 44 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{33}{120} = \frac{11}{40} \\ t = \frac{3}{8} \\ \lambda = \frac{44}{160} = \frac{11}{40} \end{cases}$ compatible

On a bien $t \in [0;1]$ et $\lambda \in [0;1]$

$\boxed{\text{Donc } [OA] \text{ et } [BC] \text{ se coupent en } I\begin{pmatrix} 0 \\ 200\times\frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ i.e. } I\begin{pmatrix} 0 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix}}$

3) L'avion 1 va de O vers A, et parcourt 75 m pour arriver en I.

L'avion 2 va de B vers C, et parcourt la distance BI pour arriver en I.

On $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 33 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, donc $BI = \|\overrightarrow{BI}\| = \sqrt{\overrightarrow{BI}^2} = \sqrt{33^2 + 0^2 + (-44)^2}$

$= \sqrt{1089 + 1936}$

$= \sqrt{3025}$

$= 55$ m

Les deux avions volant à la même vitesse de $200\ m.s^{-1}$, ils ne passeront pas au point I au même moment car l'un devra parcourir 75 m, l'autre 55 m.

$\boxed{\text{Si les avions mesurent moins de 20 m, il n'y a pas de risque de collision.}}$

Rem: Un F-14 (Top Gun 1) mesure 19 m, donc pour ce type d'avion, la manœuvre est très risquée.

Par contre, pour un CAP 230, aucun risque puisque cet avion mesure moins de 7 m... mais il ne peut pas aller à une vitesse de $200\ m.s^{-1}$.

Il s'agit donc forcément d'un avion type "chasseur" à réaction. Ce type d'avion mesure environ 15 m, donc la manœuvre est très risquée.