Ex1:

1) L'ordre est important et la répétition est autorisée.
Nous cherchons donc le nombre de 3-uplets (triplets) d'un ensemble à 8 éléments. Il y a ainsi $\boxed{8^3 = 512 \text{ tirages possibles.}}$

2) a) L'ordre est toujours important mais la répétition n'est plus autorisée.
Il s'agit donc d'un arrangement de 3 éléments parmi 8.
Il y a ainsi $A_8^3 = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \boxed{8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ tirages possibles.}}$

OU Il y a 8 choix pour le 1er tirage, puis 7 choix pour le 2ème tirage et enfin 6 choix pour le 3ème. Par principe multiplicatif, il y a donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles.

b) "Au moins une répétition de numéro" est la négation de "aucune répétition de numéro". On utilise donc le complémentaire.
Il y a ainsi $8^3 - \dfrac{8!}{5!} = 512 - 336 = \boxed{176 \text{ tirages possibles}}$

3) Le sac est opaque et les 8 jetons sont indiscernables au toucher.
Nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité.
Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1;8]\!],\ P(X_1 = k) = \dfrac{1}{8}}$
X_1 suit une loi uniforme discrète sur $[\![1;8]\!]$, $X_1 \sim \mathcal{U}_{[\![1;8]\!]}$ (HP)

4) $E(X_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} k \times P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8} \times k = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{8} k = \frac{1}{8} \times \frac{8 \times (8+1)}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$

OU $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + \ldots + 8 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(1 + 2 + \ldots + 8) = \frac{1}{8} \times \frac{8 \times (8+1)}{2} = \frac{9}{2}$

5) X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi uniforme, et $S = X_1 + X_2 + X_3$

Puis $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) \underset{\text{linéarité de l'espérance}}{=} E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times \frac{9}{2} = \boxed{\frac{27}{2}}$

6) Pour obtenir $S = 24$, il faut $X_1 = 8$, $X_2 = 8$ et $X_3 = 8$

Il y a donc une unique façon d'obtenir $S = 24$

D'où $P(S=24) = \dfrac{\text{Card}(S=24)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{8^3} = \boxed{\dfrac{1}{512}}$

7) a) Nous pouvons lister tous les tirages permettant d'obtenir $(S \geqslant 22)$:

* Pour $S = 24$: $\{(8;8;8)\}$
* Pour $S = 23$: $\{(8;8;7) ; (8;7;8) ; (7;8;8)\}$
* Pour $S = 22$: $\{(8;7;7) ; (7;8;7) ; (7;7;8) ; (8;8;6) ; (8;6;8) ; (6;8;8)\}$

On a donc $\text{Card}(S=24) = 1$; $\text{Card}(S=23) = 3$ et $\text{Card}(S=22) = 6$

D'où
$$\begin{aligned}\text{Card}(S \geqslant 22) &= \text{Card}(S=24) + \text{Card}(S=23) + \text{Card}(S=22) \\ &= 1 + 3 + 6 \\ &= \boxed{10}\end{aligned}$$

b) On a $P(S \geqslant 22) = \dfrac{\text{Card}(S \geqslant 22)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{10}{512} = \dfrac{5}{256}$

$\boxed{\text{La probabilité de gagner un lot est donc de } \dfrac{5}{256}.}$

Ex2 :

$\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

1) ⓐ on a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = e > 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} x-1 = 0^- \end{cases}$ => Par quotient, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty}$

ⓑ $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet la droite d'équation } x = 1 \text{ pour asymptote verticale.}}$

2) on a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x-1 = -\infty \end{cases}$ => Par quotient, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-}$ facultatif

3) ⓐ On admet que f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$

$\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1) - 1 \times e^x}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2} = \boxed{\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}}$

ⓑ $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $\begin{cases} x-2 < 0 \\ e^x > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}$, donc $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f'(x) < 0$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty ; 1[.}$

x	$-\infty$		1
$f(x)$	0^-	↘	$-\infty$ ‖

4) ⓐ On admet que : $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f''(x) = \dfrac{(x^2-4x+5).e^x}{(x-1)^3}$

Or $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $\begin{cases} e^x > 0 \\ (x-1)^3 < 0 \quad \text{car } x-1<0 \end{cases}$

Donc f'' est du signe opposé à x^2-4x+5 sur $]-\infty ; 1[$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

Donc le polynôme n'admet pas de racine réelle et il est du signe de son coefficient dominant $1 > 0$. D'où $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $x^2-4x+5 > 0$

Ainsi, $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f''(x) < 0$

Donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty ; 1[}$

ⓑ On a $f(0) = \dfrac{e^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

et $f'(0) = \dfrac{(0-2).e^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2\times 1}{1^2} = -2$

D'où T : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$\iff \boxed{y = -2x-1}$

ⓒ f est concave sur $]-\infty ; 1[$

donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes sur $]-\infty ; 1[$, notamment en $x=0$, avec T d'équation $y = -2x-1$

D'où $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) \leqslant -2x-1$

$\iff \dfrac{e^x}{x-1} \leqslant -2x-1$

$\iff \boxed{e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)}$ car $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $x-1<0$

5) a) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

Donc $f(]-\infty\,;1[) =]-\infty\,;0[= \mathbb{R}_-^*$

Or $-2 \in \mathbb{R}_-^*$ donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\boxed{\exists!\, \alpha \in]-\infty\,;1[\,,\ f(\alpha) = -2}$

b) On a $f(0) > -2$ et $f(0,9) < -2$ donc $0 < \alpha < 0,9$

Puis $f(0,3) > -2$ et $f(0,4) < -2$ donc $0,3 < \alpha < 0,4$

Puis $f(0,31) > -2$ et $f(0,32) < -2$ donc $0,31 < \alpha < 0,32$

Ainsi, par balayage, on obtient $\boxed{\alpha \in]0,31\,;0,32[}$

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N. $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $\boxed{I\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

2) On a $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Puis $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IF}$ ne sont pas colinéaires car la 2^{e} composante de $\overrightarrow{IF}$ est nulle alors que celle de $\overrightarrow{IH}$ ne l'est pas.

On a : $\begin{cases} \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IH} = 1 \times \frac{-1}{2} + 1 \times 1 + \frac{-1}{2} \times 1 = \frac{-1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0 & \text{donc } \overrightarrow{EJ} \perp \overrightarrow{IH} \\ \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + \frac{-1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0 & \text{donc } \overrightarrow{EJ} \perp \overrightarrow{IF} \end{cases}$

Ainsi, $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IF}$ qui dirigent le plan (FHI). Donc $\boxed{\overrightarrow{EJ} \text{ est normal au plan } (FHI).}$

3) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (FHI)$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (FHI) &\iff \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \\ &\iff 1 \times (x-0) + 1 \times (y-1) + \frac{-1}{2} \times (z-1) = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \\ &\iff x + y - 1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff 2x + 2y - z - 1 = 0 \\ &\iff \boxed{-2x - 2y + z + 1 = 0} \end{aligned}$$

4) (EJ) est dirigée par $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et donc aussi par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et passe par $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\boxed{(EJ) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

5) ⓐ On note K le projeté orthogonal de E sur (FHI)

Comme $(EJ) \perp (FHI)$, alors on a $(EJ) \cap (FHI) = \{K\}$

D'où $\begin{cases} K \in (FHI) \\ K \in (EJ) \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_K - 2y_K + z_K + 1 = 0 \\ x_K = 2t_K \\ y_K = 2t_K \\ z_K = 1 - t_K \end{cases}$

$\Rightarrow -2 \times 2t_K - 2 \times 2t_K + 1 - t_K + 1 = 0$

$\Rightarrow -4t_K - 4t_K - t_K + 2 = 0$

$\Rightarrow -9t_K = -2$

$\Rightarrow t_K = \frac{2}{9}$

D'où $\begin{cases} x_K = 2t_K = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \\ y_K = 2t_K = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \\ z_K = 1 - t_K = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \end{cases}$ Ainsi $\boxed{K\begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}}$

ⓑ On admet que $L\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, milieu de $[EF]$, est le projeté orthogonal de I sur (EFH).

Ainsi, $[IL]$ est la hauteur du tétraèdre EFHI issue de I, donc relative à la base EFH.

EFH est un triangle rectangle isocèle en E, donc $\mathcal{A}_{EFH} = \frac{1}{2} EF^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$ cm^2

Puis $\mathcal{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EFH} \times IL$

Or $\vec{IL}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $IL = \|\vec{IL}\| = \sqrt{\vec{IL}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$ cm

Ainsi, $\mathcal{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EFH} \times IL = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{6} \text{ cm}^3}$

c) On a $(EJ) \perp (FHI)$ et K est le projeté orthogonal de E sur (FHI).

Donc $[EK]$ est la hauteur du tétraèdre $EFHI$ issue de E, i.e. relative à la base FHI.

Ainsi, $\mathcal{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FHI} \times EK$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{FHI} = \frac{3 . \mathcal{V}_{EFHI}}{EK}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{FHI} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{EK}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{FHI} = \frac{1}{2 . EK}$$

Or on a $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ -2/9 \end{pmatrix}$

D'où $EK = \|\overrightarrow{EK}\| = \sqrt{\overrightarrow{EK}^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{-2}{9}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow EK = \sqrt{\frac{16+16+4}{9^2}} = \frac{\sqrt{36}}{9} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{4}}{9} = \frac{\cancel{3}^{1} \times 2}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

Finalement, $\mathcal{A}_{FHI} = \frac{1}{2 \times EK} = \frac{1}{2 \times \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{4} \text{ cm}^2}$

Ex 4 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+ , \ f(x) = \sqrt{x+1}$

1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \ f(x) - x = \sqrt{x+1} - x$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x}$$

produit par la quantité conjuguée

$$= \frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x}$$

$$\boxed{= \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

$$\iff \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x} = 0$$

car $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \sqrt{x+1}+x > 0$

$$\iff -x^2+x+1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1+4 = 5$$

D'où $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}_+ \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{R}_+ \end{cases}$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}}$, i.e. $\boxed{f(x) = x \text{ admet pour unique solution } l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

=> Partie B : Soit (u_n) : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = f(u_0) = f(5) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} < 5$
et $\sqrt{6} > 1$

Ainsi, $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ => $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et mq $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

On a (HR) : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \overset{f \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+}{\Longrightarrow} f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$

$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

=> $\mathcal{P}(n+1)$ vraie par transitivité

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$

2) On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n & \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n & \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée par } 1 \end{cases}$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel supérieur ou égal à 1.

3) (u_n) converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème du point fixe, la limite de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$

De plus, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

D'après la question A.3, on en conclut que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

4) a) seuil (2) renvoie la valeur : $\boxed{5}$

b) Ceci signifie que le rang 9 est le plus petit rang de la suite (u_n) à partir duquel la différence (en valeur absolue) entre u_n et sa limite est strictement inférieure à 10^{-4}.

Dit autrement, u_9 est le premier terme de la suite (u_n) qui permet d'avoir une approximation de $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) à 10^{-4} près.

```
from math import *
def seuil(n):
    u=5
    i=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    while abs(u-l)>=10**(-n):
        u=sqrt(u+1)
        i=i+1
    return(i)
```

```
>>> seuil(2)
5
>>> seuil(4)
9
```