Ex1 :

⇒ Partie A : $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = \dfrac{0,96x}{0,93x+0,03}$

1) f est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition $[0;1]$

$$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = \frac{0,96(0,93x+0,03) - 0,93 \times 0,96x}{(0,93x+0,03)^2}$$

$$= \frac{\cancel{0,96\times 0,93x} + 0,96\times 0,03 - \cancel{0,93\times 0,96x}}{(0,93x+0,03)^2}$$

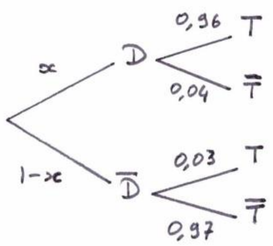
$$= \boxed{\frac{0,0288}{(0,93x+0,03)^2}}$$

2) $\forall x \in [0;1]$, $(0,93x+0,03)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;1]}$

⇒ Partie B :

1)



2) $P(D\cap T) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0,96 = \boxed{0,96x}$ (avec $x \in [0;1]$)

3) $\{D ; \overline{D}\}$ forme un système complet d'événements

Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$$
$$= 0,96x + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T)$$
$$= 0,96x + (1-x) \times 0,03$$
$$= 0,96x + 0,03 - 0,03x$$
$$= 0,93x + 0,03$$

4) $$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,96x}{0,93x+0,03} = f(x)$$

Or $x = P(D) = \dfrac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{5\cancel{0}}{100\cancel{0}} = 0,05$

D'où $\boxed{P_T(D) = f(0,05)} = \dfrac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03} \boxed{= \dfrac{32}{51} \simeq 0,63}$ (à 10^{-2} près)

5) a) Soit $x \in [0;1]$, on veut : $P_T(D) \geqslant 0,9$

$\iff f(x) \geqslant 0,9$

$\iff \dfrac{0,96x}{0,93x+0,03} \geqslant 0,9$

car $\forall x \in [0;1]$, $0,93x + 0,03 > 0$

$\iff 0,96x \geqslant 0,9(0,93x + 0,03)$

$\iff 0,96x \geqslant 0,837x + 0,027$

$\iff 0,123x \geqslant 0,027$

$\iff x \geqslant \dfrac{27}{123}$ Or $\dfrac{27}{123} = \dfrac{9}{41} \simeq 0,2195$

Donc arrondi à 10^{-2} près, il faut $\boxed{x \geqslant 0,22}$

⚠ Remarques : * Pour la question précédente, imaginons que l'on ait eu $x \geqslant \frac{26}{123}$

On $\frac{26}{123} \simeq 0{,}211$

Mais il aurait quand même fallu prendre $x \geqslant 0{,}22$ car pour $x = 0{,}21$, la condition $f(x) \geqslant 0{,}9$ n'est pas remplie.

* Dans l'exercice, nous avons trouvé $x \geqslant \frac{27}{123}$

Si on se contentait de voir que $\frac{27}{123} \simeq 0{,}22$, on pourrait être tentés de choisir $x \geqslant 0{,}23$. Or ce résultat est faux car $\frac{27}{123} < 0{,}22$.

---

b) On note p la proportion des sportifs dopés les plus performants.

L'énoncé nous invite à supposer que $x \leqslant p$

D'où par stricte croissance de f, on a : $f(x) \leqslant f(p)$

Ainsi, la valeur prédictive positive du test (modélisée par la fonction f) va augmenter suite à la décision du responsable de la compétition.

Ex 2 :

$\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 2x \cdot e^{-x}$

1) a) Soit $x \in [0;1]$, $f(x) = x \iff 2x \cdot e^{-x} = x$

$$\iff 2x \cdot e^{-x} - x = 0$$
$$\iff x(2e^{-x} - 1) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } 2e^{-x} - 1 = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = \frac{1}{2}$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \ln 2$$

On a $\ln 2 \simeq 0,69$ donc $\ln 2 \in [0;1]$

D'où $\boxed{S = \{0 ; \ln 2\}}$

b) On admet que f est dérivable sur $[0;1]$

$\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 2 \cdot e^{-x} + 2x \times (-1) \times e^{-x}$

$$= 2e^{-x}(1 - x)$$

c) $\forall x \in [0;1]$, $2e^{-x} > 0$ donc f' est du signe de $1-x$ sur $[0;1]$

Soit $x \in [0;1]$, $f'(x) \geq 0 \iff 1 - x \geq 0 \iff x \leq 1$

Donc sur $[0;1]$, f' est strictement positive et s'annule ponctuellement en $x=1$

D'où f est strictement croissante sur $[0;1]$

x	0	1
$f(x)$	0 ↗	$2e^{-1}$

$f(0) = 2 \times 0 \times e^{-0} = 0 \times 1 = 0$

$f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1}$

2) ⓐ Soit (u_n) : $u_0 = 0{,}1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}1) \simeq 0{,}18 \in [0;1]$

Donc $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$

et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 1$

On a : $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$

$\Rightarrow f(0) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$ par stricte croissance de f sur $[0;1]$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(1) \leqslant 1$ car $f(1) \simeq 0{,}18 \leqslant 1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie par transitivité

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1}$

ⓑ On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 1 & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée (par 1)} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 1$.

3) D'après les questions précédentes, on sait que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue (car dérivable) sur } [0;1] \\ (u_n) \text{ converge vers un réel } l \end{cases}$$

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, l est solution de $f(l) = l$

Or d'après la question 1.a, $l = 0$ ou $l = \ln 2$

Par ailleurs, (u_n) est strictement croissante, donc elle est minorée par son premier terme $u_0 = 0,1 > 0$. Donc $l = 0$ ne peut pas être retenue.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2}$

4) a. (u_n) est (strictement) croissante et tend vers $\ln 2$.

Donc (u_n) est majorée par $\ln 2$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln 2 \iff \boxed{\ln(2) - u_n \geqslant 0}$

b. On recherche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tq $|u_n - \ln 2| \leqslant 10^{-4}$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \geqslant 0$

Donc on veut $n \in \mathbb{N}$ tq $\ln(2) - u_n \leqslant 0,0001$

Le script doit donc tourner tant que (while) cette condition n'est pas vérifiée. Il faut donc écrire dans la boucle while la négation de $\ln(2) - u_n \leqslant 0,0001$, i.e. $\ln(2) - u_n > 0,0001$

Puis pour la valeur de u, il faut lui affecter $f(u)$, i.e $2ue^{-u}$

On remarquera que l'énoncé comporte une erreur de script, car la fonction "ln" s'écrit "log" en Python. Il faut évidemment importer les fonctions "log" et "exp" (ou "e") depuis la bibliothèque "math". Vous pouvez aussi importer toute la bibliothèque, mais cela ne change pas le problème de l'écriture "ln".

Voici deux scripts : l'un avec "exp", l'autre avec "e".

Pour les plus avancés en Python, voici également le script "seuil3" qui permet de conserver l'écriture "ln" dans le script.

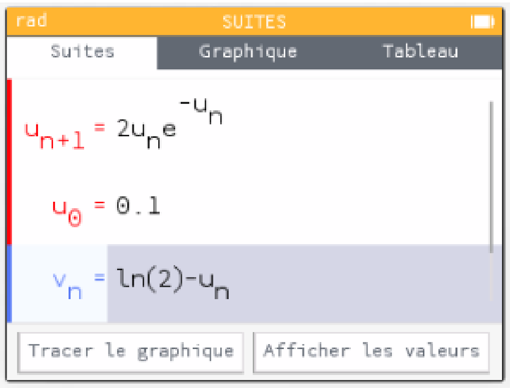
```
from math import *

def seuil():
    n=0
    u=0.1
    while log(2)-u > 0.0001:
        n=n+1
        u=2*u*exp(-u)
    return (u,n)

def seuil2():
    n=0
    u=0.1
    while log(2)-u > 0.0001:
        n=n+1
        u=2*u*e**(-u)
    return (u,n)
```

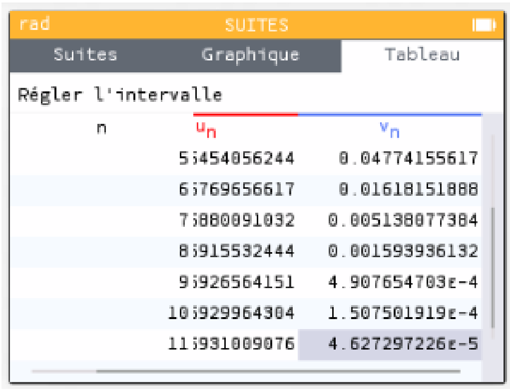
```
from math import exp , log as ln

def seuil3():
    n=0
    u=0.1
    while ln(2)-u > 0.0001:
        n=n+1
        u=2*u*exp(-u)
    return (u,n)
```

c) Les trois scripts renvoient évidemment la même valeur pour n : $\boxed{n=11}$

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> seuil()
(0.6931009075876846, 11)
>>> seuil2()
(0.6931009075876847, 11)
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> seuil3()
(0.6931009075876846, 11)
```

Il était également possible de passer par le module « *suites* » de la calculatrice pour répondre à cette question.
Il fallait alors saisir la suite (u_n) par récurrence, puis introduire une suite (v_n) tq $v_n = \ln(2) - u_n$
Dans le tableau, on lit alors le premier rang à partir duquel $v_n \leq 10^{-4}$





Ex 3 :

1) (E_0) : $y' = y$

Soit u une fonction constante solution de (E_0), avec $u : x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow u' = u$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = u(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 0 = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 0$

Donc $\boxed{\text{l'unique fonction constante solution de } (E_0) \text{ est la fonction nulle.}}$

2) Les solutions de l'équation homogène (E_0) : $y' = y$ sont toutes les fonctions de la forme : $\boxed{x \longmapsto \lambda e^{x} \ ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$

3) Soit (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$

Et h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2 \times (-\sin x) + \cos x = \cos(x) - 2\sin(x)$

Puis $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$

$$= \cos(x) - 2\sin(x)$$

$$= h'(x)$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est solution de } (E)}$.

4) Démontrons par double implication que : "f sol. de (E)" $\Leftrightarrow$ "f-h sol. de (E_0)".

$\boxed{\Rightarrow}$ Sens direct : "f sol. de (E)" $\Rightarrow$ "f-h sol de (E_0)"

Soit f solution de (E)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-h)'(x) = f'(x) - h'(x)$

h est sol. de (E) d'après 3)

$$= \left(f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\right) - \left(h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\right)$$

$$= f(x) - \cancel{\cos(x)} - \cancel{3\sin(x)} - h(x) + \cancel{\cos(x)} + \cancel{3\sin(x)}$$

$$= f(x) - h(x)$$

$$= (f-h)(x)$$

On a donc $(f-h)' = f-h$, donc f-h est sol. de (E_0) : $y' = y$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sens réciproque : "f-h sol. de (E_0)" $\Rightarrow$ "f sol. de (E)"

Soit f-h sol. de (E_0)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-h)'(x) = (f-h)(x)$

$$\Leftrightarrow f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x)$$

car h sol. de (E)

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$\Leftrightarrow$ f est sol. de (E)

on aurait pu se contenter d'écrire des implications car l'équivalence est perdue dès la 1ère ligne avec le "donc"

Conclusion : $\boxed{\text{"f sol. de (E)"} \Leftrightarrow \text{"f-h sol. de } (E_0)\text{"}}$

5) D'après les questions précédentes, on a :

$x \longmapsto \lambda e^{x} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \qquad$ sol. de (E_0)

Or f sol. de $(E) \iff f-h$ sol. de (E_0)

$\iff (f-h)(x) = \lambda e^{x} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff f(x) - h(x) = \lambda e^{x} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff f(x) = \lambda e^{x} + h(x) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \boxed{f(x) = \lambda e^{x} + 2\cos(x) + \sin(x) \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

6) On a g sol. de (E) et $g(0) = 0$

Ainsi, $\begin{cases} g(x) = \lambda e^{x} + 2\cos(x) + \sin(x) \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ g(0) = 0 \end{cases}$

D'où $g(0) = 0 \iff \lambda . e^{0} + 2\cos 0 + \sin 0 = 0$

$\iff \lambda \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0$

$\iff \lambda = -2$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = -2e^{x} + 2\cos(x) + \sin(x)}$

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2e^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right) dx = \left[-2e^{x} - \cos(x) + 2\sin(x)\right]_0^{\pi/2}$

$= \left(-2e^{\pi/2} - \cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(-2e^{0} - \cos 0 + 2\sin 0\right)$

$= -2e^{\pi/2} - 0 + 2\times 1 + 2\times 1 + 1 - 2\times 0$

$= \boxed{-2e^{\pi/2} + 5}$

Ex 4 :

1) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

La 3ᵉ coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ est nulle mais pas celle de $\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$

OU $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 3 = 1\times\lambda \\ -1 = 3\times\lambda \\ 0 = -2\times\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -\frac{1}{3} \\ \lambda = 0 \end{cases}$ ← incompatibles

2) a) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, on a alors :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times1+3\times3+5\times(-2) = 1+9-10 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times3+3\times(-1)+5\times0 = 3-3+0 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent (ABC).

Donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} \text{ est } \underline{\text{normal}} \text{ à (ABC).}}$ (Le terme "orthogonal" de l'énoncé est mal choisi.)

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ normal à (ABC) donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme :

$1\times x + 3\times y + 5\times z + d = 0 \iff x+3y+5z+d=0$

or $A\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} \in (ABC) \iff x_A + 3y_A + 5z_A + d = 0$

$\iff -2+3\times0+5\times2+d=0$

$\iff d = -8$

D'où (ABC) : $\boxed{x+3y+5z-8=0}$

c) $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0+3\times0+5\times3-8 = 0+0+15-8 = 7 \neq 0$

Donc $D \notin (ABC)$

Ainsi, $\boxed{\text{les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.}}$

3) ⓐ D'après la représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$, on en déduit que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$.

Or $D\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ est le point de $\mathcal{D}_1$ de paramètre $t = 0$,

Comme $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et que $D \notin (ABC)$,

On en déduit que $\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.}}$

ⓑ Etudions $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$: $\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3(1+3s) = -1-5s \\ 3+5(1+3s) = 2-6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3+9s = -1-5s \\ 3+5+15s = 2-6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s = 1+3\times\frac{-2}{7} = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{4}{14} = \frac{-2}{7} \\ s = -\frac{6}{21} = \frac{-2}{7} \end{cases} \quad \text{compatibles}$$

Donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point I correspondant au paramètre $t = \frac{1}{7}$ de l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$, ou $s = \frac{-2}{7}$ de l'éq. paramétrique de $\mathcal{D}_2$.

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{7} \\ y_I = 3\times\frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ z_I = 3+5\times\frac{1}{7} = \frac{26}{7} \end{cases}$$

D'où $\boxed{\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left\{ I\begin{pmatrix}1/7\\3/7\\26/7\end{pmatrix} \right\}}$

4) ⓐ H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

D'après les questions précédentes, H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la droite $\mathcal{D}_1$, hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

Ainsi, $\begin{cases} x_H = t_H \\ y_H = 3t_H \\ z_H = 3+5t_H \\ x_H + 3y_H + 5z_H - 8 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow t_H + 3\times 3t_H + 5(3+5t_H) - 8 = 0$

$\Rightarrow t_H + 9t_H + 15 + 25t_H - 8 = 0$

$\Rightarrow 35t_H + 7 = 0$

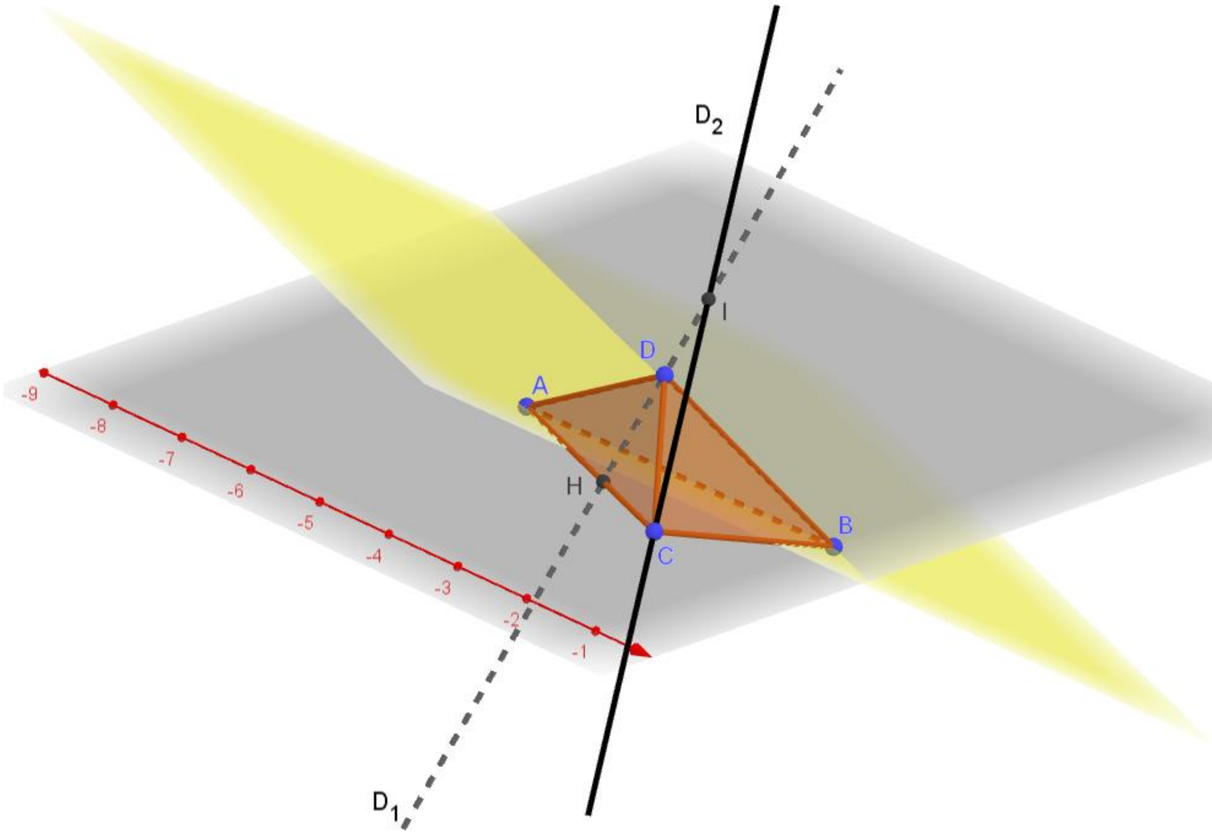
$\Rightarrow t_H = \frac{-7}{35} = -\frac{1}{5}$

On a alors $\begin{cases} x_H = t_H = -\frac{1}{5} \\ y_H = 3t_H = 3\times\frac{-1}{5} = -\frac{3}{5} \\ z_H = 3+5t_H = 3+5\times\frac{-1}{5} = 3-1 = 2 \end{cases}$ D'où $\boxed{H\begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 2 \end{pmatrix}}$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $H\begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC), on a :

$$\begin{aligned} \text{dist}\left(D\,;(ABC)\right) &= HD \\ &= \|\overrightarrow{HD}\| \\ &= \sqrt{\overrightarrow{HD}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{35}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{35}}{5} \\ &\simeq 1{,}18 \quad (\text{à } 10^{-2} \text{ près}) \end{aligned}$$


D2
I
D
A
H
C
B
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
D1