Ex1 :

Soit f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x^2 - x.\ln x$

$\Rightarrow$ Partie A :

1) * En 0^+ : On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = 0 \end{cases}$ (th. des croissances comparées)

Puis par différence : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0}$

* En $+\infty$: Il s'agit d'une F.I. de la forme "$\infty - \infty$"

On $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

Puis on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (th. des croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1$

Enfin, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on a par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - (\ln(x) + 1) = \boxed{2x - 1 - \ln x}$

3) On admet que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = 2 - 0 - \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2x-1}{x}}$

4) Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, f'' est du signe de $2x - 1$ car $x > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \geqslant 0 \iff 2x - 1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\frac{1}{2} - 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 1 - 1 + \ln 2$
$= \ln 2$

5) f'' s'annule et change de signe ($-$ vers $+$) en $x = \frac{1}{2}$, donc f' admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$ qui vaut $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 > 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

$\Rightarrow$ Partie B : Soit g définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = x - \ln x$

1) On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, g' est du signe de $x-1$ car $x > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) \geqslant 0 \iff x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$g(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x \iff x^2 - x\ln x = x \iff x(x - \ln x) = x$
$\iff x(x - \ln x) - x = 0$
$\iff x(x - \ln x - 1) = 0$
$\iff x - \ln x - 1 = 0$ car $x \neq 0$
$\iff x - \ln x = 1$
$\iff g(x) = 1$
$\iff x = 1$

$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$

$\Rightarrow$ Partie C : Soit (u_n) : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \simeq 0{,}6$

On a donc bien $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

et montrons que $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$

On a HR : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$ — par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$ — car $f(1) = 1$ d'après B.2

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$ — par transitivité car $u_1 \geqslant \frac{1}{2}$ (cf initialisation)

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$

2) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 1 \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée (par 1)} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 1$

3) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ (se démontre facilement avec f continue et th. du point fixe)

Donc d'après B.2, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \boxed{\ell = 1}$

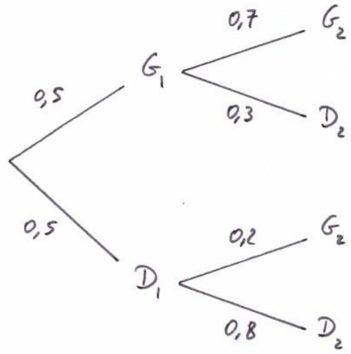
D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

Ex 2 :

1) D'après l'énoncé, $P_{G_1}(G_2) = 0{,}7$

Donc $P_{G_1}(D_2) = 1 - P_{G_1}(G_2) = 1 - 0{,}7 = \boxed{0{,}3}$

2)

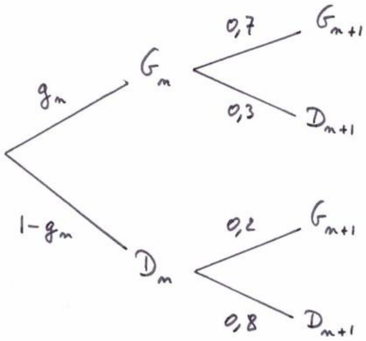


3) $\{G_1 ; D_1\}$ forme un système complet d'événements

Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}35 + 0{,}1 \\ &= \boxed{0{,}45} \end{aligned}$$

4) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$,



(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{G_n ; D_n\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(G_{n+1})$$

$$= g_n \times 0{,}7 + (1 - g_n) \times 0{,}2$$

$$= 0{,}7\, g_n + 0{,}2 - 0{,}2\, g_n$$

$$= \boxed{0{,}5\, g_n + 0{,}2}$$

5) (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = g_n - 0{,}4$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = g_{n+1} - 0{,}4$

$$= 0{,}5\, g_n + 0{,}2 - 0{,}4$$

$$= 0{,}5\, g_n - 0{,}2$$

$$= 0{,}5\, g_n - 0{,}5 \times 0{,}4$$

$$= 0{,}5\,(g_n - 0{,}4)$$

$$= 0{,}5 \cdot v_n$$

Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}5}$

De plus, on a $v_1 = g_1 - 0{,}4 = 0{,}5 - 0{,}4 = \boxed{0{,}1}$

(b) D'après la question précédente, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = g_n - 0{,}4$

$$\Leftrightarrow g_n = v_n + 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4}$$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad g_{n+1} - g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{(n+1)-1} + 0{,}4 - (0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4)$

$$= 0{,}1 \times 0{,}5 \times 0{,}5^{n-1} \cancel{+0{,}4} - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \cancel{-0{,}4}$$

$$= 0{,}05 \times 0{,}5^{n-1} - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$$

$$= (0{,}05 - 0{,}1) \times 0{,}5^{n-1}$$

$$= -0{,}05 \times 0{,}5^{n-1} < 0 \quad \text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0{,}5^{n-1} > 0$$

Ainsi, $\boxed{(g_n) \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{N}^*}$

7) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$

$$= 0{,}1 \times 0{,}5^{-1} \times 0{,}5^n + 0{,}4$$

$$= 0{,}1 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \times 0{,}5^n + 0{,}4$$

$$= 0{,}1 \times 2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$$

$$= 0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ car $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 0{,}2 \times 0 + 0{,}4 = \boxed{0{,}4}$

$\boxed{\text{Sur le long terme, Léa gagnera dans 40\% des cas.}}$

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut : $g_n - 0{,}4 \leq 0{,}001$

$$\iff 0{,}2 \times 0{,}5^n + \cancel{0{,}4} - \cancel{0{,}4} \leq 0{,}001 \quad \text{cf question précédente}$$

$$\iff 0{,}5^n \leq \frac{0{,}001}{0{,}2}$$

$$\iff \ln(0{,}5^n) \leq \ln 0{,}005 \quad \text{par croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\iff n \ln 0{,}5 \leq \ln 0{,}005$$

$$\iff n \geq \frac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}5} \quad \text{car } \ln 0{,}5 < 0$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}5} \simeq 7{,}6$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$, donc il faut au moins $\boxed{n = 8}$

Rem : On pouvait aussi utiliser l'expression de la question 5.b

$$g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001 \iff 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4 - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$$
$$\iff 0{,}5^{n-1} \leqslant 0{,}01$$
$$\iff \ln(0{,}5^{n-1}) \leqslant \ln 0{,}01$$
$$\iff (n-1).\ln 0{,}5 \leqslant \ln 0{,}01$$
$$\iff n-1 \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5}$$
$$\iff n \geqslant 1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5}$$

avec
$$1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} = \frac{\ln(0{,}5) + \ln(0{,}01)}{\ln 0{,}5} = \frac{\ln(0{,}5 \times 0{,}01)}{\ln 0{,}5} = \frac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}5}$$

(On retrouve l'expression proposée précédemment)

On a $1 + \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} \simeq 7{,}6$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $n \geqslant 8$

9) * On veut $g_n \leqslant 0{,}4 + e$ ⚠ Rien à voir avec l'exponentielle

Donc la boucle doit tourner tant que ("while") la condition n'est pas réalisée, i.e. tant que $g_n > 0{,}4 + e$ (while g > 0.4 + e :)

* A la ligne 5, il manque "*" entre "0.5" et "g", sinon le script renvoie une erreur.

* A la ligne 6, on incrémente le rang de 1, donc "n = n + 1"

D'où :

```
while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
```

⚠ Ne pas oublier

⚠ A corriger

```
1 def seuil(e):
2     g=0.5
3     n=1
4     while g>0.4+e:
5         g=0.5*g+0.2
6         n=n+1
7     return(n)
```

Ex 3 :

$\boxed{\text{1) VRAI}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \dfrac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \dfrac{3+0+0}{6+0} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} < u_n \leqslant \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$

D'après le théorème des gendarmes (th. d'encadrement), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Rem : l'inégalité stricte $\frac{1}{2} < u_n$ n'est pas gérante car les inégalités strictes ne résistent pas au passage à la limite.

$\boxed{\text{2) FAUX}}$

Pour que h soit convexe sur $[-1;3]$, il faut que h' soit croissante sur cet intervalle. Or d'après le graphique, h' est décroissante sur $[1,2;3]$.

$\boxed{\text{3) VRAI}}$

* Pour les chiffres, l'ordre est important et la répétition autorisée.
  Il s'agit donc d'un 4-uplet d'un ensemble à 10 éléments.
  Il y a donc $10^4 = 10\,000$ possibilités pour les chiffres.
* Pour les lettres, il s'agit d'un arrangement de 2 parmi 3 puis l'ordre est important mais il n'y a pas de répétition. Donc $3\times 2 = 6$ possibilités.
* Par principe multiplicatif, il y a au total $6\times 10^4 = 60\,000$ possibilités.
* Puis sans 0, il y a au total $6\times 9^4 = 6\times 6561 = 39\,366$ possibilités.
* Finalement, avec au moins un 0, il y a : $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$ possibilités.

$\boxed{\text{4) VRAI}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fcts définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x . f'(x) - f(x) = x \times (1 + \ln x) - x . \ln x$

$$= x + x . \ln x - x . \ln x$$

$$= x$$

Donc $f : x \longmapsto x . \ln x$ est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x y' - y = x$

Ex4 :

⇒ Partie A :

1) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-4\\-6\\5\end{pmatrix}$

ainsi que $\mathcal{P}$: $2x+2y-3z+1=0$

$2x_A+2y_A-3z_A+1 = 2\times1+2\times0-3\times1+1 = 2+0-3+1 = 0$ donc $\boxed{A\in\mathcal{P}}$

$2x_B+2y_B-3z_B+1 = 2\times2+2\times(-1)-3\times1+1 = 4-2-3+1 = 0$ donc $\boxed{B\in\mathcal{P}}$

$2x_C+2y_C-3z_C+1 = 2\times(-4)+2\times(-6)-3\times5+1 = -8-12-15+1 = -34\neq0$ donc $\boxed{C\notin\mathcal{P}}$

2) Dans le R.O.N., on a $C'\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ issue de son eq. cartésienne.

Ainsi, $\overrightarrow{CC'}$ est colinéaire à $\vec{n}$ donc $(CC')\perp\mathcal{P}$

De plus, $2x_{C'}+2y_{C'}-3z_{C'}+1 = 2\times0+2\times(-2)-3\times(-1)+1 = 0-4+3+1=0$ donc $C'\in\mathcal{P}$

Ainsi, $\begin{cases}(CC')\perp\mathcal{P}\\ C'\in\mathcal{P}\\ C\notin\mathcal{P}\end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{C'\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} \text{ est le proj. orth. de } C \text{ sur } \mathcal{P}}$

3) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AB) et $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in(AB)$

Donc on peut donner une représentation paramétrique de (AB) :

$$\boxed{(AB) : \begin{cases}x = 1+t\\ y = -t\\ z = 1\end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

4) H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $(AB)\cap(HC) = \{H\}$

$$H\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} \in (AB) \iff \begin{cases} x_H = 1+t_H \\ y_H = -t_H \\ z_H = 1 \end{cases}$$

De plus, (AB) et (HC) sont orthogonales $\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC} = 0$

$$\iff 1\times(-4-x_H) + (-1)\times(-6-y_H) + 0\times(5-z_H) = 0$$

$$\iff -4-x_H+6+y_H = 0$$

$$\iff x_H - y_H - 2 = 0$$

Puis $H\in(AB)\cap(HC) \iff \begin{cases} x_H - y_H - 2 = 0 \\ x_H = 1+t_H \\ y_H = -t_H \\ z_H = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 1+t_H-(-t_H)-2 = 0$$

$$\Rightarrow 2t_H - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_H = \frac{1}{2}$$ ← Rem : H est le milieu de $[AB]$

D'où $\begin{cases} x_H = 1+t_H = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_H = -t_H = -\frac{1}{2} \\ z_H = 1 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{H\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

⇒ Partie B : Dans le R.O.N., on a $H\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -11/2 \\ -11/2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ceci confirme le résultat précédent.

1) $\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\overrightarrow{HC}^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{-11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{121}{4}+\frac{121}{4}+16} = \sqrt{\frac{121}{2}+\frac{32}{2}} = \sqrt{\frac{153}{2}} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{2}}$

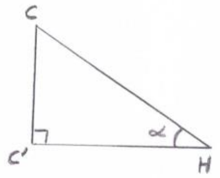
D'où $\|\overrightarrow{HC}\| = \frac{\sqrt{9\times 17}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{17}\times\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{34}}{2}}$

2) H est le proj. orth. de C sur (AB) donc (HC) est la hauteur de ABC issue de C.

Par ailleurs, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

D'où $S = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AB\times HC = \frac{1}{2}\times\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{3\sqrt{17}\times\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{17}}{2}}$

$\Rightarrow$ Partie C :



1) On a vu que $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$, donc $(AB) \subset \mathcal{P}$

Comme $H \in (AB)$, alors $H \in \mathcal{P}$

De plus, on a vu que $C' \in \mathcal{P}$ et $(CC') \perp \mathcal{P}$, donc le triangle HCC' est rectangle en C'. En posant $\alpha = \widehat{CHC'}$, on a :

$$\cos\alpha = \frac{HC'}{HC} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{9\times17}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{17}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

OU On a $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'} = HC \times HC' \times \cos\widehat{CHC'}$

avec $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-11/2\\-11/2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC'}\begin{pmatrix}-3/2\\-3/2\\-2\end{pmatrix}$

D'où $-\frac{11}{2}\times\frac{-3}{2} + \frac{-11}{2}\times\frac{-3}{2} + 4\times(-2) = \frac{\sqrt{9\times17}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{17}{2}} \times \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{33}{4} + \frac{33}{4} - 8 = \frac{3\times17}{2}\times\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{17}}{\cancel{2}} = 3\times\frac{\cancel{17}}{\cancel{2}}\times\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{1}{3}}$

2) a) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{HC'}\begin{pmatrix}-3/2\\-3/2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{HC'}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\times1 + \frac{-3}{2}\times(-1) + (-2)\times0 = \frac{-3}{2}+\frac{3}{2}+0 = 0$ donc $\overrightarrow{HC'} \perp \overrightarrow{AB}$

Ainsi les droites (HC') et (AB) sont orthogonales.

Or $H \in (HC')$ et $H \in (AB)$ d'après A.4, donc $\boxed{(HC') \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires}}$

b) Ainsi, (HC') est la hauteur de ABC' issue de C'.

D'où $S' = \mathcal{A}_{ABC'} = \frac{1}{2}AB\times HC' = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{1}{2}\times\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{17}}{\cancel{\sqrt{2}}} \boxed{= \frac{\sqrt{17}}{2}}$

ⓒ On a démontré dans la question (C.1) :

$$\cos\alpha = \frac{HC'}{HC} = \frac{AB \times HC'}{AB \times HC} = \frac{\frac{1}{2} AB \times HC'}{\frac{1}{2} AB \times HC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{S'}{S}$$

Ainsi, on a : $\boxed{\cos\alpha = \frac{S'}{S}} \iff \boxed{S' = S.\cos\alpha}$