Ex1:

=> Partie A :

1)

x	0		$\frac{3}{2}$		5
$f(x)$	$-5,2$	$\nearrow$	$2,4$	$\searrow$	$0,35$

2) $\mathcal{C}$ traverse sa tangente T en A, donc il semble que A soit un $\boxed{\text{point d'inflexion}}$ de $\mathcal{C}$.

3) f est croissante sur $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3}{2} ; 5\right]$

Donc f' doit être positive sur $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{3}{2} ; 5\right]$

Ainsi $\boxed{\mathcal{C}_2 \text{ est associée à } f'.}$

De plus, par lecture graphique, il semble que f soit concave sur $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2} ; 5\right]$. On s'attend donc à f'' négative sur $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{5}{2} ; 5\right]$. Ceci correspond bien à $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_1 \text{ qui doit être associée à } f''.}$

4) f est négative sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et la fonction représentée par $\mathcal{C}_3$ est croissante sur ce même intervalle. Comme f est sensée être la dérivée de la fonction représentée par $\mathcal{C}_3$, ceci n'est pas cohérent.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{C}_3 \text{ ne peut pas être la représentation graphique sur } \mathbb{R}_+ \text{ d'une primitive de la fonction } f.}$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = (4x-2)\,e^{-x+1}$

1) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = 4 . e^{-x+1} + (4x-2)\times(-1)\times e^{-x+1}$$
$$= \left(4-(4x-2)\right) . e^{-x+1}$$
$$= (4-4x+2) . e^{-x+1}$$
$$= \boxed{(-4x+6) . e^{-x+1}}$$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x+1} > 0$ donc f' est du signe de $-4x+6$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0 \iff -4x+6 \geqslant 0 \iff 4x \leqslant 6 \iff x \leqslant \frac{3}{2}$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

$f(0) = (4\times 0-2)\,e^{-0+1} = -2e$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4\times\frac{3}{2}-2\right)e^{-\frac{3}{2}+1}$
$= 4e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$

ⓒ On admet que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f''(x) = -4 . e^{-x+1} + (-4x+6)\times(-1)\times e^{-x+1}$$
$$= (-4+4x-6) . e^{-x+1} = (4x-10)\,e^{-x+1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x+1} > 0$ donc f'' est du signe de $4x-10$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) \geqslant 0 \iff 4x-10 \geqslant 0 \iff 4x \geqslant 10 \iff x \geqslant \frac{5}{2}$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	inflexion	convexe	

f'' s'annule et change de signe en $x_A = \frac{5}{2}$, donc

$\boxed{\frac{5}{2} \text{ est l'abscisse du point d'inflexion de } f.}$

2) a) Soit F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = (ax+b).e^{-x+1}$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$,

dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = a.e^{-x+1} + (ax+b)\times(-1).e^{-x+1} = (-ax+a-b)e^{-x+1}$

Puis F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = f(x)$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = a+2 = -4+2 = -2 \end{cases}$

D'où $\boxed{(a;b) = (-4;-2)}$

b) $I = \int_{3/2}^{8} f(x).dx = \left[F(x)\right]_{\frac{3}{2}}^{8} = F(8) - F\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow I = (-4\times 8-2).e^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right).e^{-\frac{3}{2}+1}$

$\Leftrightarrow \boxed{I = -34.e^{-7} + 8\,e^{-\frac{1}{2}} \simeq 4,82}$ (à 10^{-2} près)

3) a) La hauteur du point D est égale à :

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4\times\frac{3}{2}-2\right).e^{-\frac{3}{2}+1} = 4e^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{e}} \simeq 2,43\ m}$ (à 10^{-2} près)

b) f est continue (car dérivable) et positive sur $\left[\frac{3}{2};8\right]$,

Donc $I = \int_{3/2}^{8} f(x).dx$ correspond à l'aire située entre $\mathcal{C}_f$, l'axe

des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{3}{2}$ et $x = 8$, en unités d'aire.

Ainsi, l'aire du mur en m^2 est égale à I.

Puis on veut couvrir $\frac{3}{4}I = \frac{3}{4}\left(-34e^{-7}+8e^{-\frac{1}{2}}\right) \simeq \frac{3}{4}\times 4,82\ m^2$

Comme une bombe couvre $0,8\ m^2$, il en faudra environ $\dfrac{\frac{3}{4}\times 4,82}{0,8} \simeq 4,5$

$\boxed{\text{L'artiste aura donc besoin de 5 bombes.}}$

Ex 2 :

1) Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$

La présence du 0 dans la 2e composante de $\overrightarrow{AB}$ mais pas dans celle de $\overrightarrow{AC}$ permet d'affirmer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$ et forment le plan (ABC).

ou

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}1 = -3\lambda\\0 = 4\lambda\\-1 = \lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = -\frac{1}{3}\\\lambda = 0\\\lambda = -1\end{cases}$ incompatibles

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $D\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

On peut voir directement que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ou On résout un système :

$A ; B ; C$ et D sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1 = 1\times\lambda + (-3)\times\mu\\4 = 0\times\lambda + 4\times\mu\\-3 = -1\times\lambda + 1\times\mu\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda - 3\mu = 1\\4\mu = 4\\-\lambda + \mu = -3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1 + 3\mu\\\mu = 1\\\lambda = \mu + 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1 + 3\times 1 = 4\\\mu = 1\\\lambda = 1 + 3 = 4\end{cases}$$ compatibles

Ainsi, $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires d'où $\boxed{\text{les points } A, B, C \text{ et } D \text{ sont coplanaires.}}$

(b) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{CD} = 4.\overrightarrow{AB}$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc $(AB)/\!/(CD)$

D'où $\boxed{\text{ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD]}}$ ⚠

3) (a) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, et on a dans le R.O.N. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times1+1\times0+2\times(-1) = 2+0-2 = 0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-3)+1\times4+2\times1 = -6+4+2 = 0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC). Donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (ABC).}}$

(b) Ainsi, d'après (3.a), (ABC) a une eq. cartésienne de la forme :

$2\times x + 1\times y + 2\times z + d = 0 \iff 2x+y+2z+d = 0$

On $B\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}\in(ABC) \iff 2x_B+y_B+2z_B+d=0 \iff 2\times4-1+2\times0+d=0 \iff d=-7$

D'où (ABC) : $\boxed{2x+y+2z-7=0}$

(OU) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC) \iff \vec{n}.\overrightarrow{BM}=0 \iff 2(x-4)+1\times(y+1)+2(z-0)=0$

$\iff 2x-8+y+1+2z=0$

$\iff \boxed{2x+y+2z-7=0}$

(c) $\Delta\perp(ABC)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ normal à (ABC) est vecteur directeur de Δ.

De plus, $S\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\in\Delta$

Donc une représentation paramétrique de Δ est :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases}x = 2+2t\\ y = 1+t\\ z = 4+2t\end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

(d) On note $\Delta \cap (ABC) = \{I\}$

D'où $\begin{cases} I \in (ABC) \\ I \in \Delta \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0 \\ x_I = 2 + 2t_I \\ y_I = 1 + t_I \\ z_I = 4 + 2t_I \end{cases}$

$\Rightarrow 2(2+2t_I) + 1 + t_I + 2(4 + 2t_I) - 7 = 0$

$\Rightarrow 4 + 4t_I + 1 + t_I + 8 + 4t_I - 7 = 0$

$\Rightarrow 9t_I + 6 = 0$

$\Rightarrow t_I = -\frac{6}{9} = \frac{-2}{3}$

D'où $\begin{cases} x_I = 2 + 2t_I = 2 + 2 \times \frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \\ y_I = 1 + t_I = 1 + \frac{-2}{3} = \frac{1}{3} \\ z_I = 4 + 2t_I = 4 + 2 \times \frac{-2}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\Delta \cap (ABC) = \left\{ I \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \right\}}$

Puis $S\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$, et comme nous sommes dans un R.O.N.,

$SI = \|\overrightarrow{SI}\| = \sqrt{\overrightarrow{SI}^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$

Ainsi, $\boxed{SI = 2 \text{ cm}}$

4) (a) Vérifions que $H\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal de B sur (CD)

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 4 + (-4) \times 0 + 1 \times (-4) = 4 + 0 - 4 = 0$ donc $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CD}$

Ainsi (HB) et (CD) sont orthogonales. Vérifions alors que $H \in (CD)$

* On peut utiliser une représentation paramétrique de (CD), avec $C\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in (CD)$:

$(CD) : \begin{cases} x = 4t \\ y = 3 \\ z = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et on voit que $H\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le point de (CD) de paramètre $t_H = \frac{3}{4}$. Ainsi, $H \in (CD)$

* On pouvait aussi montrer que $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{HC} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{CD}$

Ainsi, les points H, C et D sont alignés donc $H \in (CD)$

Conclusion : On a $\begin{cases} H \in (CD) \\ (HB) \text{ et } (CD) \text{ orthogonales} \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\text{H est le proj. orth. de B sur } (CD)}$

Puis dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$, donc :

$HB = \|\overrightarrow{HB}\| = \sqrt{\overrightarrow{HB}^2} = \sqrt{1^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}\text{ cm}}$

ⓑ D'après la question précédente, on en déduit que $[HB]$ est la hauteur du trapèze ABDC, relativement aux bases $[AB]$ et $[CD]$.

En effet, on a : $\begin{cases} B \in [AB] \\ H \in (CD) \\ H \text{ proj. orth. de B sur } (CD) \end{cases}$

D'où $\mathcal{A}_{ABDC} = \frac{AB+CD}{2} \times HB$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ cm

et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $CD = \sqrt{\overrightarrow{CD}^2} = \sqrt{4^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{2\times16} = 4\sqrt{2}$ cm

Finalement, $\mathcal{A}_{ABDC} = \frac{AB+CD}{2}\times HB = \frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2} = \frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\times 3\cancel{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A}_{ABDC} = 15 \text{ cm}^2}$

5) D'après les questions précédentes, on a $(SI) \perp (ABC)$ et $I \in (ABC)$

Donc $[SI]$ est la hauteur de la pyramide SABDC issue de S, et donc relative à la base ABDC (trapèze).

D'où $\mathcal{V}_{SABDC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABDC} \times SI = \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times \cancel{15}^{5} \times 2 = \boxed{10 \text{ cm}^3}$

Ex3:

⇒ Partie A :

1) On lit dans l'énoncé : $\boxed{P(I) = 0,057}$

2) ⓐ On répète $n = 100$ fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " la personne a déjà été infectée " est égale à $p = P(I) = 0,057$. Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$. $\boxed{X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0,057)}$

ⓑ $E(X) = n \times p = 100 \times 0,057 = \boxed{5,7}$

En moyenne, sur 1000 individus testés, 57 ont déjà été infectés.

ⓒ $P(X=0) = \binom{100}{0} \times p^0 \times (1-p)^{100-0} = 1 \times 1 \times (1-0,057)^{100} = \boxed{0,943^{100}}$

D'où $\boxed{P(X=0) \simeq 0,0028}$ (à 10^{-4} près)

ⓓ $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big)$

$\Leftrightarrow P(X \geqslant 2) = 1 - 0,943^{100} - \binom{100}{1} \times 0,057^1 \times 0,943^{100-1}$

$= 1 - 0,943^{100} - 5,7 \times 0,943^{99}$

$\boxed{\simeq 0,9801}$ (à 10^{-4} près)

ⓔ La fonction de répartition $k \mapsto P(X \leqslant k)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc il suffit de tester différentes valeurs entières de k.

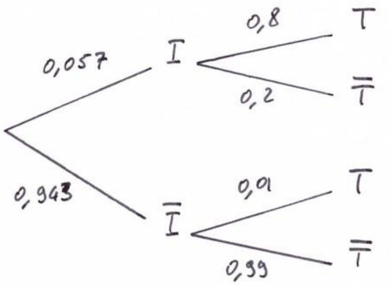
On a $P(X \leqslant 8) \simeq 0,88 < 0,9$ et $P(X \leqslant 9) \simeq 0,94 > 0,9$

Il faut donc choisir $\boxed{n = 9.}$

Dans un échantillon de 100 personnes, la probabilité qu'au plus 9 d'entre elles soient déjà infectées par la COVID est strictement supérieure à 0,9.

⇒ Partie B :

1)

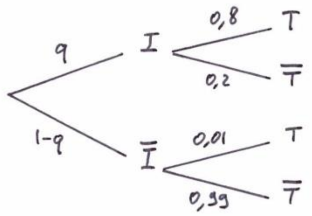


2) $\{I ; \overline{I}\}$ forme un système complet d'événements,
D'après la loi des probabilités totales,

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\overline{I} \cap T) = P(I) \times P_I(T) + P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(T)$$
$$= 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01$$
$$= 0{,}0456 + 0{,}00943$$
$$= \boxed{0{,}05503}$$

3) $P_T(I) = \dfrac{P(I \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0456}{0{,}05503} = \boxed{\dfrac{4560}{5503} \simeq 0{,}8286}$ (à 10^{-4} près)

⇒ Partie C : Notons $q \in [0 ; 1]$ la probabilité recherchée $P(I)$



La loi des probabilités totales donne désormais :

$$P(T) = P(I) \times P_I(T) + P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(T) \iff 0{,}2944 = 0{,}8 . q + 0{,}01 . (1-q)$$
$$\iff 0{,}8q - 0{,}01q = 0{,}2944 - 0{,}01$$
$$\iff 0{,}79q = 0{,}2844$$
$$\iff q = \frac{0{,}2844}{0{,}79}$$
$$\iff q = 0{,}36$$

D'où $\boxed{P(I) = 0{,}36}$

Ex 4 :

$\boxed{\text{1) FAUX}}$

Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers un réel $\ell \geq 0$

On peut donner un contre-exemple : comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0

en étant décroissante et minorée par 0, il suffit de choisir $\left(\frac{1}{n} + 2\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

exemple qui est décroissante, minorée par 0, mais qui converge vers 2.

$\boxed{\text{2) VRAI}}$

Notons (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\dfrac{9^n}{7^n} + \dfrac{3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n + \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$

Comme $\frac{3}{7} \in [0;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0^+$

et comme $\frac{9}{7} > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{9}{7}\right)^n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{9}{7}\right)^n = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Par somme, on a } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \\ \text{Or } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{D'après le théorème de comparaison,} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \end{array}$$

$\boxed{\text{3) VRAI}}$

Si $N = 4$, l'instruction "range(N)" signifie $[\![0\,;N-1]\!]$, i.e $[\![0\,;3]\!]$

Ainsi, on part de 1 puis on ajoute successivement 0 ; 1 ; 2 et 3.

On a bien : $1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 7$

En fait, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} k = 1 + \dfrac{(n-1) \times n}{2}$

Donc ici $U_4 = 1 + \dfrac{3 \times 4}{2} = 1 + 6 = 7$

```python
def terme(N):
    U=1
    for i in range(N):
        U=U+i
    return U
```

```
>>> terme(4)
7
```

$\boxed{4)\ \text{FAUX}}$

Notons (u_n) et (v_n) les suites associées respectivement aux prix A et B.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1000 \times n$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \times 2^k = 1 \times \frac{1-2^{n-1+1}}{1-2} = 2^n - 1$

Puis $u_{15} = 1000 \times 15 = 15\,000$

et $v_{15} = 2^{15} - 1 = 32\,767$

$\Rightarrow v_{15} > u_{15}$

Donc le prix B est plus élevé que le prix A.

$\boxed{5)\ \text{VRAI}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \ln x \,.\, dx - \int_1^{n} \ln x \,.\, dx$$

$$= \int_1^{n+1} \ln x \,.\, dx + \int_n^{1} \ln x \,.\, dx$$

Relation de Chasles.

$$= \int_n^{n+1} \ln x \,.\, dx$$

Les bornes sont dans l'ordre croissant et on a : $\forall x \geqslant 1,\ \ln x \geqslant 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, par positivité de l'intégrale, on a :

$$\forall x \geqslant 1,\ \ln x \geqslant 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_n^{n+1} \ln x \,.\, dx \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

$\Rightarrow (v_n)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$