Ex 1 :

⇒ Partie I :

1) Les événements A^+, B^+, AB^+ et O^+ étant disjoints, on a :

$$P(Rh+) = P(A+ \cup B+ \cup AB+ \cup O+)$$
$$= P(A+) + P(B+) + P(AB+) + P(O+)$$
$$= 0,382 + 0,077 + 0,025 + 0,365$$
$$= \boxed{0,849}$$

2) $P_{Rh+}(A) = \dfrac{P(A \cap Rh+)}{P(Rh+)} = \dfrac{P(A+)}{P(Rh+)} = \dfrac{0,382}{0,849} = \dfrac{382}{849} \boxed{\simeq 0,450}$ (à 10^{-3} près)

3) $P_{AB}(Rh-) = \dfrac{P(AB \cap Rh-)}{P(AB)} = \dfrac{P(AB^-)}{P(AB)} = \dfrac{0,004}{P(AB+) + P(AB-)}$

car $\{Rh- ; Rh+\}$ forme un système complet d'événements (probabilités totales)

D'où $P_{AB}(Rh-) = \dfrac{0,004}{0,025 + 0,004} = \dfrac{0,004}{0,029} = \dfrac{4}{29} \boxed{\simeq 0,138}$ (à 10^{-3} près)

⇒ Partie II :

1) a) On répète $n = 50$ fois de manière identique et indépendante (tirage assimilé avec remise car 50 est très faible devant la population française) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " la personne choisie est un donneur universel " est égale à $p = P(O^-) = 0,065$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,065$. $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,065)$

Puis $P(X = 8) = \binom{50}{8} \times 0,065^8 \times (1 - 0,065)^{50-8}$ $\boxed{\simeq 0,010}$ (à 10^{-3} près)

b) La fonction "proba(k)" renvoie la valeur de $P(X \leqslant k)$.

Il s'agit du script de la fonction de répartition de $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}065)$

Ainsi, on a $\boxed{P(X \leqslant 8) \simeq 0{,}995}$ (à 10^{-3} près)

Cette valeur, ici arrondie à 10^{-3} près, est la valeur renvoyée par "proba(8)".

Interprétation : La probabilité qu'il y ait au plus 8 donneurs universels parmi 50 personnes choisies au hasard dans la population française est d'environ 0,995 (à 10^{-3} près).

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}065)$

On veut : $P(X \geqslant 1) > 0{,}999$

$\iff 1 - P(X=0) > 0{,}999$

$\iff P(X=0) < 1 - 0{,}999$

$\iff \binom{n}{0} \times 0{,}065^0 \times (1-0{,}065)^{n-0} < 0{,}001$

$\iff 1 \times 1 \times 0{,}935^n < 0{,}001$

$\iff 0{,}935^n < 0{,}001$

$\iff \ln(0{,}935^n) < \ln 0{,}001$ car ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \, . \ln 0{,}935 < \ln 0{,}001$

$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}935}$ car $\ln 0{,}935 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}935} \simeq 102{,}8$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc il faut au minimum $\boxed{103}$ personnes à choisir au hasard.

Ex2 :

⇒ Partie I : (u_n) : $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

$\boxed{\text{1) VRAIE}}$

Le calcul des premiers termes de (u_n) nous permet de conjecturer que (u_n) semble décroissante et semble converger vers 3. Ainsi, l'affirmation 1 semble vraie.

Démontrons donc par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \overbrace{u_{n+1}}^{\text{minoration (par transitivité)}} \underbrace{\leqslant u_n}_{\text{décroissance}}$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 10$ et $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{16}{3}$

Ainsi, $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

et montrons que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

D'après (HR) : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow 0 \times \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{3}u_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}u_n$

$\Rightarrow 0 + 2 \leqslant \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \leqslant \frac{1}{3}u_n + 2$

$\Rightarrow 2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ par transitivité

⇒ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : (u_n) est décroissante et minorée par 0.

$\boxed{\text{2) FAUSSE}}$

Nous avons vu dans l'hérédité précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2 > 0$

(u_n) étant minorée par 2, elle ne peut pas tendre vers 0.

$\boxed{3)\ \text{VRAIE}}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3} u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3} u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$

$= \frac{1}{3} v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ <u>Partie II</u> : (E) : $y' = \frac{3}{2} y + 2$

$\boxed{4)\ \text{VRAIE}}$

D'après le cours, il s'agit de la fonction $x \longmapsto \dfrac{-\frac{3}{2}}{2}$ i.e. $x \longmapsto -\frac{3}{4}$

OU en notant g cette fonction constante définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ et $g'(x) = 0$

D'où g sol. de (E) $\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2} \times k + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$

$\boxed{5)\ \text{VRAIE}}$

Les solutions de (E) sont les fonctions f_λ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ de la forme : $f_\lambda(x) = \underbrace{\lambda e^{\frac{3}{2}x}}_{\text{sol. générale de l'équ. diff homogène associée}} \underbrace{- \frac{4}{3}}_{\text{solution particulière}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Puis $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \lambda . e^{\frac{3}{2} \times 0} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lambda \times 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$ et $f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x} = 2 e^{\frac{3}{2}x}$

Puis $f'(1) = 2 \times e^{\frac{3}{2} \times 1} = 2 . e^{\frac{3}{2}}$ qui est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Ex 3 :

⇒ Partie I : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2-4).e^{-x}$

1) En $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ (par composition)

Puis par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

En $+\infty$: on a une F.I. du type "$0 \times \infty$"

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2.e^{-x} - 4.e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x} - 4e^{-x}$

$= \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} - 4.e^{-x}$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

Puis par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0^+$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$

Donc par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

2) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x \times e^{-x} + (x^2-4) \times (-e^{-x})$

$= (2x - (x^2-4)).e^{-x}$

$= (2x - x^2 + 4).e^{-x}$

$= \boxed{(-x^2 + 2x + 4).e^{-x}}$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ donc f' est du signe de $-x^2+2x+4$ sur $\mathbb{R}$

Etude du trinôme : $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 4 = 4+16 = 20$

Puis $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2-2\sqrt{5}}{-2} = 1+\sqrt{5} \\ x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{20}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2+2\sqrt{5}}{-2} = 1-\sqrt{5} \end{cases}$

Comme le coefficient dominant du trinôme est négatif, on a :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1-\sqrt{5})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{5})$	$\searrow$	0

$\Rightarrow$ Partie II : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \cdot e^{-x} \cdot dx$

1) $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^0 \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_{-2}^{0} 1\times e^{-x} \cdot dx = \int_{-2}^{0} e^{-x} \cdot dx = \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -e^0 - (-e^2) = \boxed{e^2-1}$

2) $\forall x \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^{n+1} \cdot e^{-x} \cdot dx$

Posons les fonctions u et v suivantes, continûment dérivables sur $[-2;0]$, et effectuons une IPP :

$u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = (n+1) \cdot x^n$ et $v(x) = -e^{-x}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \left[-x^{n+1}.e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (n+1).x^n \times (-e^{-x})\,dx$

$= 0 - \left(-(-2)^{n+1}.e^{-(-2)}\right) + (n+1).\int_{-2}^{0} x^n.e^{-x}.dx$

$= \boxed{(-2)^{n+1}.e^2 + (n+1).I_n}$

Rem : On pouvait aussi partir de l'expression de I_n et poser :

$u(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = x^n$

$u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}.e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -\dfrac{x^{n+1}}{n+1}.e^{-x}.dx$

$\Leftrightarrow I_n = 0 - \dfrac{(-2)^{n+1}}{n+1}.e^2 + \dfrac{1}{n+1} \times \int_{-2}^{0} x^{n+1}.e^{-x}\,dx$

$\Leftrightarrow I_n = \dfrac{-(-2)^{n+1}}{n+1}.e^2 + \dfrac{1}{n+1}.I_{n+1}$

$\Leftrightarrow (n+1).I_n = -(-2)^{n+1}.e^2 + I_{n+1}$

$\Leftrightarrow I_{n+1} = (-2)^{n+1}.e^2 + (n+1).I_n$

3) D'après la question précédente :

$I_1 = I_{0+1} = (-2)^{0+1}.e^2 + (0+1).I_0 = -2.e^2 + e^2 - 1 = \boxed{-e^2-1}$

$I_2 = I_{1+1} = (-2)^{1+1}.e^2 + (1+1).I_1 = (-2)^2.e^2 + 2(-e^2-1)$

$= 4e^2 - 2e^2 - 2$

$= \boxed{2e^2 - 2}$

$= 2(e^2-1)$

$= 2I_0$

⇒ Partie III :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

Donc $f : x \longmapsto (x^2-4).e^{-x}$ est du signe de x^2-4 sur $\mathbb{R}$

Or $x^2-4=0 \iff x=-2$ ou $x=2$

Comme il s'agit d'un polynôme du second degré convexe (coefficient dominant positif), on peut directement dresser le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) D'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ coupe $(O;\vec{\imath})$ à gauche du domaine $\mathcal{D}$ au point d'abscisse $x=-2$

Puis $\mathcal{C}_f$ coupe $(O;\vec{\jmath})$ à droite du domaine $\mathcal{D}$ au point d'abscisse 0.

Ainsi, d'après la question précédente, f est négative sur $[-2;0]$.

L'aire S du domaine $\mathcal{D}$ est donc égale à l'opposé de l'intégrale : $\int_{-2}^{0} f(x).dx$

Ainsi, $S = -\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{0} (x^2-4)\,e^{-x}\,dx = -\int_{-2}^{0} \left(x^2e^{-x} - 4e^{-x}\right)dx$

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$S = -\int_{-2}^{0} x^2e^{-x}\,dx + 4\int_{-2}^{0} e^{-x}.dx = -I_2 + 4I_0 = -2I_0 + 4I_0 = 2I_0 = \boxed{2(e^2-1)\ u.a}$$

Ex 4 :

⇒ Partie I

1) Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ non colinéaires car leur première composante est identique mais pas les deux autres.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-3)+3\times 2+3\times 0 = -6+6+0 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-3)+3\times 0+3\times 2 = -6+0+6 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC), donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} \text{ est normal à } (ABC)}$.

2) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\iff 2(x-3)+3(y-0)+3(z-0) = 0$

$\iff 2x-6+3y+3z = 0$

$\iff \boxed{2x+3y+3z-6 = 0}$

Rem : On pouvait également montrer que les coordonnées des points A ; B et C vérifient l'équation cartésienne proposée.

3) d passe par $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$,

d'où $\boxed{d : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

4) $d \cap (ABC)$: $\begin{cases} 2x+3y+3z-6=0 \\ x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$

$\Rightarrow 2\times 2t + 3\times 3t + 3\times 3t - 6 = 0$

$\Rightarrow 4t + 9t + 9t - 6 = 0$

$\Rightarrow 22t = 6$

$\Rightarrow t = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$

Puis $\begin{cases} x = 2t = 2\times\frac{3}{11} = \frac{6}{11} \\ y = 3t = 3\times\frac{3}{11} = \frac{9}{11} \\ z = y = \frac{9}{11} \end{cases}$

D'où $\boxed{d \cap (ABC) = \left\{ H\begin{pmatrix} 6/11 \\ 9/11 \\ 9/11 \end{pmatrix} \right\}}$

5) On a :

$\begin{cases} d = (OH) \\ O \notin (ABC) \\ H \in (ABC) \\ d \perp (ABC) \end{cases}$ $\Rightarrow$ H est le projeté orthogonal de O sur (ABC)

D'où $\text{dist}\left(O ; (ABC)\right) = OH$

$= \|\overrightarrow{OH}\|$

$= \sqrt{\overrightarrow{OH}^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2}$ car $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 6/11 \\ 9/11 \\ 9/11 \end{pmatrix}$

$= \sqrt{\frac{36+81+81}{11^2}}$

$= \frac{\sqrt{198}}{\sqrt{11^2}}$

$= \frac{\sqrt{9\times 22}}{11}$

$= \boxed{\frac{3\sqrt{22}}{11}}$ u.l.

⇒ Partie II :

1) On a $A \in (O;\vec{\imath})$, $B \in (O;\vec{\jmath})$ et $C \in (O;\vec{k})$

Donc les droites (OA) , (OB) et (OC) sont perpendiculaires entre elles 2 à 2.

Ainsi, le triangle OAB est rectangle en O et on a :

$$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \times OB = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \text{ u.a.}$$

Puis $[OC]$ est la hauteur du tétraèdre $OABC$ issue de C, i.e. relative à la base triangulaire OAB.

Ainsi, $\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{OAB} \times OC = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 = \boxed{2 \text{ u.v.}}$

2) D'après la partie I, H est le projeté orthogonal de O sur (ABC)

Donc $[OH]$ est la hauteur du tétraèdre $OABC$ issue de O, i.e. relative à la base triangulaire ABC.

Ainsi, $\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times OH$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{3 . \mathcal{V}_{OABC}}{OH}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{\cancel{3} \times 2}{\frac{\cancel{3} \times \sqrt{22}}{11}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{2 \times 11}{\sqrt{22}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{22}{\sqrt{22}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{\cancel{\sqrt{22}} \times \sqrt{22}}{\cancel{\sqrt{22}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{22} \text{ u.a.}}$$

3) Dans les triangles OAB, OAC et OBC rectangles en O, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{OAB} = 3 \text{ u.a.} \quad (\text{cf II.1}) \\ \mathcal{A}_{OAC} = \frac{1}{2} \times OA \times OC = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \text{ u.a.} \\ \mathcal{A}_{OBC} = \frac{1}{2} \times OB \times OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \text{ u.a.} \end{cases}$$

Puis $\mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OAC}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 9 + 9 + 4 = 22$

et $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \sqrt{22}^2 = 22$ ⚠ Calculer séparément

On a bien $\boxed{\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OAC}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2}$

La propriété est bien démontrée.

Remarque : La propriété que nous venons de démontrer sur un cas particulier peut très facilement s'étendre à tout tétraèdre trirectangle. Elle est connue sous le nom de "théorème de De Gua" car elle a été démontrée par le mathématicien français Jean-Paul de Gua de Malves à la fin du XVIII^e siècle.
Il s'agit d'une extension du théorème de Pythagore à la géométrie dans l'espace.