Ex 1 :

⇒ Partie A : Soit (E) : $y' + \frac{1}{4}y = 20.e^{-\frac{1}{4}x}$

1) Soit $g : x \mapsto a\,x.e^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$, avec $a \in \mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (fcts linéaires et exponentielle), donc sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = a.e^{-\frac{1}{4}x} + a.x \times \frac{-1}{4}.e^{-\frac{1}{4}x}$

$= a.e^{-\frac{1}{4}x}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$

Puis g est solution particulière de (E)

$\Leftrightarrow g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = 20.e^{-\frac{1}{4}x}$

$\Leftrightarrow a.e^{-\frac{1}{4}x}\left(1 - \frac{x}{4}\right) + \frac{1}{4}a.x.e^{-\frac{1}{4}x} = 20.e^{-\frac{1}{4}x}$

$\Leftrightarrow a.e^{-\frac{1}{4}x}\left(1 - \cancel{\frac{x}{4}} + \cancel{\frac{x}{4}}\right) = 20.e^{-\frac{1}{4}x}$

$\Leftrightarrow a.e^{-\frac{1}{4}x} = 20.e^{-\frac{1}{4}x}$

car $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 20}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = 20x\,e^{-\frac{1}{4}x}$

2) Soit (E') : $y' + \frac{1}{4}y = 0$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

Puis (E') $\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions h de la forme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) = \lambda.e^{-\frac{1}{4}x},\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

3) Les solutions de (E) sont ainsi les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ de la forme :

$f_\lambda : x \longmapsto h(x) + g(x)$, i.e. $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\frac{1}{4}x} + 20x . e^{-\frac{1}{4}x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$= \boxed{(\lambda + 20x) . e^{-\frac{1}{4}x} , \lambda \in \mathbb{R}}$

4) On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq : $f_\lambda(0) = 8$

$\Longleftrightarrow (\lambda + 20 \times 0) . e^{-\frac{1}{4} \times 0} = 8$

$\Longleftrightarrow \lambda \times 1 = 8$

$\Longleftrightarrow \boxed{\lambda = 8}$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ , \ f(x) = (20x + 8) . e^{-\frac{1}{4}x}}$

$\Rightarrow$ Partie B :

1) a) On admet dans l'énoncé de f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 20 . e^{-\frac{1}{4}x} + (20x + 8) \times \frac{-1}{4} . e^{-\frac{1}{4}x}$

$= 20 . e^{-\frac{1}{4}x} - (5x + 2) . e^{-\frac{1}{4}x}$

$= (20 - 5x - 2) . e^{-\frac{1}{4}x}$

$= \boxed{(18 - 5x) . e^{-\frac{1}{4}x}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$ donc f' est du signe de $18 - 5x$

Puis soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 18 - 5x \geqslant 0 \Leftrightarrow 5x \leqslant 18 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{18}{5}$

De plus, on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On a vu dans la partie A que $f(0) = 8$

Enfin, $f\left(\frac{18}{5}\right) = \left(20 \times \frac{18}{5} + 8\right) . e^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = (4 \times 18 + 8) . e^{-\frac{1}{2} \times \frac{9}{5}} = \boxed{80 . e^{-\frac{9}{10}}}$

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	8	$\nearrow$	$80.e^{-0,9}$	$\searrow$	0

2) ⓐ La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[14;15] \subset \left[\frac{18}{5};+\infty\right[$

On a $f(14) = (20 \times 14 + 8).\, e^{-\frac{1}{4} \times 14} = 288.\, e^{-\frac{7}{2}} \simeq 8,7 > 8$

et $f(15) = (20 \times 15 + 8).\, e^{-\frac{1}{4} \times 15} = 308.\, e^{-\frac{15}{4}} \simeq 7,2 < 8$

Ainsi, $8 \in [f(15)\,;\, f(14)] = f([14;15])$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 8 \text{ admet une unique solution } \alpha \in [14;15]}$

ⓑ On reconnait un algorithme de dichotomie

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
b - a	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
f(m) > 8	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

car $f(14,5) \simeq 7,94$; car $f(14,25) \simeq 8,31$; car $f(14,375) \simeq 8,12$; car $f(14,4375) \simeq 8,03$; arrêt car $b - a \leq 0,1$

ⓒ $\boxed{\text{L'objectif de la fonction est de déterminer par dichotomie un encadrement de } \alpha \text{ d'amplitude } 10^{-1} :\ \alpha \in \,]14,4375\,;\,14,5[}$

Testons le script pour vérifier que notre conclusion est correcte :

```
from math import exp

def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation():
    a,b=14,15
    while b-a>0.1:
        m=(a+b)/2
        if f(m)>8:
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

En lançant le script, on obtient dans la console :

```
>>> solution_equation()
(14.4375, 14.5)
```

Ex 2 :

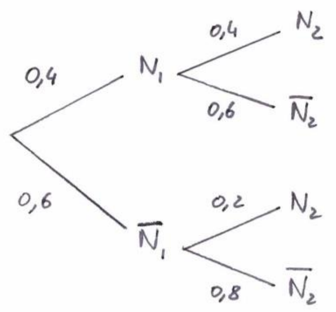
⇒ Partie A

1) ⓐ On cherche $P_{\overline{N_1}}(N_2)$

Il y a initialement 4 boules dans U_2 (une noire et trois blanches).
Si on tire une boule blanche dans U_1 et qu'on la met dans U_2, il y a alors 5 boules dans U_2 (une noire et quatre blanches).
Ainsi, il y a une chance sur cinq de tirer une boule noire dans U_2.

$$\boxed{P_{\overline{N_1}}(N_2) = \frac{1}{5} = 0,2}$$

ⓑ



Explications :

* On a 10 boules dans U_1 : 4 noires et 6 blanches
Donc $P(N_1) = \frac{4}{10} = 0,4$ puis $P(\overline{N_1}) = 1 - P(N_1) = 1 - 0,4 = 0,6$

* Si on tire une boule noire dans U_1 et on la met dans U_2, il y a alors 5 boules dans U_2 : 2 noires et 3 blanches
Donc $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{5} = 0,4$ puis $P_{N_1}(\overline{N_2}) = 1 - P_{N_1}(N_2) = 1 - 0,4 = 0,6$

* Enfin, on a vu dans la question précédente que $P_{\overline{N_1}}(N_2) = 0,2$
Donc $P_{\overline{N_1}}(\overline{N_2}) = 1 - P_{\overline{N_1}}(N_2) = 1 - 0,2 = 0,8$

2) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = \boxed{0,16}$

Rem : Comme plusieurs probabilités sont égales dans l'arbre, il est essentiel de bien utiliser les formules littérales afin de les distinguer.

3) $\{N_1 ; \overline{N_1}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N_1} \cap N_2) \\ &= 0,16 + P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(N_2) \\ &= 0,16 + 0,6 \times 0,2 \\ &= 0,16 + 0,12 \\ &= \boxed{0,28} \end{aligned}$$

4) $P_{N_2}(\overline{N_1}) = \dfrac{P(\overline{N_1} \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{0,12}{0,28} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7} \boxed{\simeq 0,43}$ (à 10^{-2} près)

⇒ Partie B :

1) On répète n fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " on pioche une boule noire dans U_2 " est égale à $p = P(N_2) = 0,28$

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 0,28$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n ; 0,28)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $1 - 0,72^n \geqslant 0,9 \iff 0,72^n \leqslant 1 - 0,9$

$$\begin{aligned} &\iff 0,72^n \leqslant 0,1 \\ &\iff \ln(0,72^n) \leqslant \ln 0,1 \quad \text{car } \ln \text{ est (strict) croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n \ln(0,72) \leqslant \ln 0,1 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln 0,1}{\ln 0,72} \quad \text{car } \ln 0,72 < 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}72} \simeq 7{,}01$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc le plus petit $n \in \mathbb{N}$ recherché est $\boxed{n = 8}$

⚠ Il s'agit d'un arrondi par excès car on veut $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}72}$

3) On remarque que $0{,}72 = P(\overline{N_2})$

Ainsi $0{,}72^n$ représente la probabilité de piocher n boules blanches dans U_2 lorsqu'on effectue n fois l'expérience aléatoire, i.e. $P(X=0)$ avec $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}28)$

Enfin, $1-0{,}72^n$ représente la probabilité de l'événement contraire du précédent, i.e. la probabilité de piocher au moins une boule noire dans U_2 lorsqu'on effectue n fois l'expérience aléatoire. Ainsi, $P(X \geqslant 1) = 1-0{,}72^n$

Par le calcul, on retrouve bien :

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X=0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} \\
&= 1 - 1 \times 1 \times (1-0{,}28)^n \\
&= 1 - 0{,}72^n
\end{aligned}$$

Ainsi, $1-0{,}72^n \geqslant 0{,}9 \iff P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$

Donc d'après la question précédente :

> Il faut répéter au moins $n = 8$ fois l'expérience aléatoire pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire dans U_2 soit supérieure ou égale à $0{,}9$.

⇒ Partie C :

1) Le tirage est simultané donc il n'y a ni ordre ni remise.

Il s'agit ainsi d'une combinaison de 2 boules parmi 10.

Il y a donc $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \times (10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2 \times \cancel{8!}} = \frac{\cancel{10}^{5} \times 9}{\cancel{2}_{1}} = \boxed{45 \text{ tirages possibles.}}$

2) On veut une boule **noire** parmi quatre, et une boule blanche parmi six.

Par principe multiplicatif, il y a $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = \boxed{24 \text{ tirages possibles}}$

3) Pour le tirage dans l'urne U_1, il y a 3 cas de figure.

Notons-les sous la forme d'événements :

E : " on pioche 2 boules noires dans U_1 "

F : " on pioche 2 boules de couleurs différentes dans U_1 "

G : " on pioche 2 boules blanches dans U_1 "

* 1er cas : On a $P(E) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\,(4-2)!}}{45} = \frac{\frac{\cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2}}}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

Puis il y a alors 3 boules noires et 3 boules blanches dans U_2.

Donc $P_E(N_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

* 2e cas : On a $P(F) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \times \cancel{6}^{2}}{\cancel{45}_{15}} = \frac{8}{15}$

Puis il y a alors 2 boules noires et 4 boules blanches dans U_2.

Donc $P_F(N_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

* 3ᵉ cas : On a $P(G) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{\frac{6!}{2!(6-2)!}}{45} = \dfrac{\frac{\cancel{6}^{3}\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{2}\times \cancel{4!}}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$

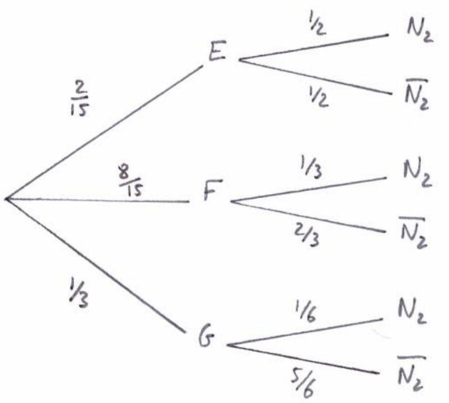
OU Comme $\{E\,;F\,;G\}$ forme une partition, on a :

$P(G) = 1-\left(P(E)+P(F)\right) = 1-\left(\dfrac{2}{15}+\dfrac{8}{15}\right) = 1-\dfrac{10}{15} = 1-\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Puis il y a alors 1 boule noire et 5 boules blanches dans U_2

Donc $P_G(N_2) = \dfrac{1}{6}$

On peut désormais modéliser l'expérience avec un arbre :



Comme $\{E\,;F\,;G\}$ forme un système complet d'événements,
D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(N_2) &= P(E\cap N_2) + P(F\cap N_2) + P(G\cap N_2)\\
&= P(E)\times P_E(N_2) + P(F)\times P_F(N_2) + P(G)\times P_G(N_2)\\
&= \frac{\cancel{2}^{1}}{15}\times\frac{1}{\cancel{2}_{1}} + \frac{8}{15}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\\
&= \frac{1}{15} + \frac{8}{45} + \frac{1}{18}\\
&= \frac{6+16+5}{90}\\
&= \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = \boxed{0{,}3 > 0{,}28}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Donc la probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est supérieure dans cette nouvelle expérience (par rapport à celle de la partie A).

Ex 3 :

$\boxed{1) \text{ FAUSSE}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{25 + (-1)^n}{n}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 25 + (-1) \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 25 + 1$

$\Rightarrow \quad 24 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 26$

$\Rightarrow \quad \dfrac{24}{n} \leqslant \dfrac{25 + (-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{26}{n}$ car $n > 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{26}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{24}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{26}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes (th. d'encadrement), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Donc (u_n) converge.

$\boxed{2) \text{ VRAIE}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ (w_n) : \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$ et $(t_n) : \quad t_n = \dfrac{k}{w_n}, \quad k > 0$

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_{n+1} - t_n = \dfrac{k}{w_{n+1}} - \dfrac{k}{w_n} = k\left(\dfrac{1}{w_{n+1}} - \dfrac{1}{w_n}\right) = k\left(\dfrac{1 + w_n}{w_n} - \dfrac{1}{w_n}\right)$

$\Leftrightarrow \quad t_{n+1} - t_n = k \times \dfrac{1 + w_n - 1}{w_n} = k \times \dfrac{w_n}{w_n} = k \times 1 = k > 0$

Ainsi, (t_n) est une suite arithmétique de raison k.

Comme $k > 0$, (t_n) est strictement croissante

3) VRAIE

Soit (v_n) : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1+v_n)$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$

calculons les premiers termes de (v_n) :

$v_0 = 1$
$v_1 = \ln(1+v_0) = \ln(1+1) = \ln 2 \simeq 0,693 < v_0$
$v_2 = \ln(1+v_1) = \ln(1+\ln 2) \simeq 0,527 < v_1$
$v_3 = \ln(1+v_2) = \ln(1+\ln(1+\ln 2)) \simeq 0,423 < v_2$

La suite (v_n) semble décroissante, mais ceci n'est qu'une conjecture qu'il faut démontrer par récurrence. Notons $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$

Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $v_1 < v_0$ (cf ci-dessus) $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_{n+1} \leqslant v_n$ et montrons que $v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$

D'après HR : $v_{n+1} \leqslant v_n \Rightarrow 1+v_{n+1} \leqslant 1+v_n$

$\Rightarrow \ln(1+v_{n+1}) \leqslant \ln(1+v_n)$ car ln est (strict) croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$

$\Rightarrow v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : (v_n) est décroissante

Rem 1 : Comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait pu montrer que (v_n) est strictement décroissante.

Rem 2 : Avant de commencer la récurrence, on aurait pu étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée $\frac{1}{1+x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est (strict) croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ensuite, dans l'hérédité de la récurrence, on aurait pu simplement composer HR $v_{n+1} \leqslant v_n$ par f croissante pour obtenir directement $v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$

4) VRAIE

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$

$$= \int_1^e 1 \times (\ln x)^{n+1} dx$$

On procède par IPP en posant :

$u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = 1$

$u'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$ et $v(x) = x$

u et v sont continûment dérivables sur $[1 ; e]$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \left[x . (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e (n+1) \times \cancel{\frac{1}{x}} \times (\ln x)^n \times \cancel{x} . dx$

$$= e . (\ln e)^{n+1} - 1 \times (\ln 1)^{n+1} - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n . dx$$

$$= e \times 1^{n+1} - 1 \times 0^{n+1} - (n+1) . I_n$$

$$= e - (n+1) . I_n$$

Ex 4 :

1) $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \in (d_1)$ et $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ dirige (d_1), d'où (d_1) a pour représentation paramétrique : $\boxed{(d_1) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

2) D'après sa représentation paramétrique, (d_2) est dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ont une composante nulle à des endroits différents, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, (d_1) et (d_2) ne sont ni confondues, ni strictement parallèles. Elles peuvent donc être soit sécantes, soit non coplanaires. Pour le savoir, étudions leur potentielle intersection (en changeant le nom du paramètre de l'une des deux droites). ⚠

$$(d_1) \cap (d_2) : \begin{cases} 1+\lambda = 0 \\ 2+2\lambda = 1+t \\ -1 = 2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ t = 2-2\lambda-1 \\ t = -1-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ t = 1-2\times(-1) = 3 \\ t = -3 \end{cases}$$

incompatible

Donc $(d_1)\cap(d_2) = \emptyset$, et ainsi $\boxed{(d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sont non coplanaires.}}$

3) On a : $-2x_A + y_A + 5z_A + 5 = -2\times 1 + 2 + 5\times(-1) + 5 = -2+2-5+5 = 0$

L'éq. cartésienne proposée est bien celle d'un plan passant par le point A.

Puis on extrait de cette équation le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ potentiellement normal à $\mathcal{P}$.

Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u_1} = -2\times 1 + 1\times 2 + 5\times 0 = -2+2+0 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \vec{u_1} \\ \vec{n}\cdot\vec{w} = -2\times 2 + 1\times(-1) + 5\times 1 = -4-1+5 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \vec{w} \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\vec{u_1}$ et $\vec{w}$ qui dirige $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ a donc bien pour équation cartésienne : $\boxed{-2x+y+5z+5=0}$

4) a) On a : $\begin{cases} A \in (d_1) \\ A \in \mathcal{P} \\ \vec{u_1} \text{ dirige } (d_1) \\ \vec{u_1} \text{ dirige } \mathcal{P} \end{cases} \Rightarrow (d_1) \subset \mathcal{P}$

Or (d_1) et (d_2) sont non coplanaires, donc non parallèles.

Ainsi (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Ceci implique que $(d_2) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, i.e. $\boxed{(d_2) \text{ et } \mathcal{P} \text{ sont sécants.}}$

b) D'une part, $-2x_F + y_F + 5z_F + 5 = -2\times 0 + \frac{-5}{3} + 5\times\frac{-2}{3} + 5 = 0 - \frac{5}{3} - \frac{10}{3} + \frac{15}{3} = 0$

Donc $F\begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

D'autre part, $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 1 + t_F \\ z_F = 2 + t_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{5}{3} = 1 + t_F \\ -\frac{2}{3} = 2 + t_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_F = \frac{-5}{3} - 1 = \frac{-8}{3} \\ t_F = -\frac{2}{3} - 2 = \frac{-8}{3} \end{cases}$ compatibles

Donc $F\begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \in (d_2)$, c'est son point de paramètre $t = -\frac{8}{3}$

Donc $\boxed{(d_2) \cap \mathcal{P} = \left\{ F\begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\}}$

5) a) Dans le R.O.N., on a $E\begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{EF}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

On a $\begin{cases} \vec{u_1}\cdot\vec{EF} = 1\times\frac{2}{3} + 2\times\frac{-1}{3} + 0\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 = 0 & \text{donc } \vec{u_1} \perp \vec{EF} \\ \vec{u_2}\cdot\vec{EF} = 0\times\frac{2}{3} + 1\times\frac{-1}{3} + 1\times\frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 & \text{donc } \vec{u_2} \perp \vec{EF} \end{cases}$

Ainsi, on a (d_1) orthogonale à (EF) et (d_2) orthogonale à (EF).

Or $E \in (d_1)$ et $F \in (d_2)$

Donc d'après la définition donnée au début de l'exercice : $\boxed{EF = dist\big((d_1);(d_2)\big)}$

(b) Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$

D'où $EF = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{\overrightarrow{EF}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ u.l.

Ainsi, la distance entre (d_1) et (d_2) est de $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ u.l.}}$