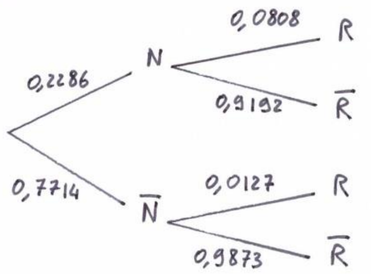
Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



2) $P(N\cap R) = P(N)\times P_N(R) = 0{,}2286\times 0{,}0808 \boxed{\simeq 0{,}0185}$ (à 10^{-4} près)

3) $\{N\,;\overline{N}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la loi des probabilités totales,

$$P(R) = P(N\cap R) + P(\overline{N}\cap R)$$
$$= P(N\cap R) + P(\overline{N})\times P_{\overline{N}}(R)$$
$$= 0{,}2286\times 0{,}0808 + 0{,}7714\times 0{,}0127$$
$$\boxed{\simeq 0{,}0283} \text{ (à } 10^{-4} \text{ près)}$$

4) $P_R(N) = \dfrac{P(N\cap R)}{P(R)} \simeq \dfrac{0{,}0185}{0{,}0283} \boxed{\simeq 0{,}6537}$ (à 10^{-4} près)

Mais en prenant les valeurs exactes, on obtient $\boxed{0{,}6534}$ (à 10^{-4} près)

⇒ Partie B :

1) $\boxed{X \sim \mathcal{B}(500\,;\,0{,}65)}$

2) $P(X=325) = \binom{500}{325}\times 0{,}65^{325}\times(1-0{,}65)^{500-325} \boxed{\simeq 0{,}0374}$ (à 10^{-4} près)

3) $$P(X\geqslant 325) = 1 - P(X<325)$$
$$= 1 - P(X\leqslant 324)$$
$$\simeq 1 - 0{,}4794$$
$$\boxed{\simeq 0{,}5206}$$

Dans le lot de 500 véhicules, la probabilité qu'au moins 325 soient neufs est environ de 0,5206

$\Rightarrow$ Partie C :

1) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}65)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0{,}65^0 \times (1-0{,}65)^{n-0}$

$= 1 \times 1 \times 0{,}35^n$

$= \boxed{0{,}35^n}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut :

$q_n \geqslant 0{,}9999$

$\Leftrightarrow P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9999$

$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}9999$

$\Leftrightarrow P(X=0) \leqslant 1 - 0{,}9999$

$\Leftrightarrow p_n \leqslant 0{,}0001$

$\Leftrightarrow 0{,}35^n \leqslant 0{,}0001$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}35^n) \leqslant \ln(0{,}0001)$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow n \ln 0{,}35 \leqslant \ln 0{,}0001$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}35}$ car $\ln 0{,}35 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}35} \simeq 8{,}8$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc la plus petite valeur de n tq $q_n \geqslant 0{,}9999$ est $\boxed{n = 9}$

Ex 2:

1) Dans le R.O.N. $(A; \vec{AI}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a $\boxed{F\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} ; H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } M\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}}$

Rem : Pour M milieu de [CD], on peut utiliser $C\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\vec{HM}\begin{pmatrix}3/2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$, et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{HM} = 2\times\frac{3}{2} + 6\times 0 + 3\times(-1) = 3+0-3 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\vec{HM} \\ \vec{n}\cdot\vec{HF} = 2\times 3 + 6\times(-1) + 3\times 0 = 6-6+0 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\vec{HF} \end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{HM}$ et $\vec{HF}$ non colinéaires (positions des 0 dans les coordonnées) qui dirigent le plan (HMF). Ainsi, on peut conclure que $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (HMF)}}$

ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est normal à (HMF), donc (HMF) a une équation cartésienne de la forme $2x+6y+3z+d=0$

Or $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in (HMF)$ $\iff 2x_H + 6y_H + 3z_H + d = 0$

$\iff 2\times 0 + 6\times 1 + 3\times 1 + d = 0$

$\iff 0 + 6 + 3 + d = 0$

$\iff d = -9$

D'où (HMF) : $\boxed{2x+6y+3z-9=0}$

Rem : On pouvait aussi montrer que les coordonnées des points H, M et F vérifient l'équation proposée.

ⓒ $\mathcal{P}$ a pour équation $5x+15y-3z+7=0$ donc $\vec{m}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

La présence d'un signe négatif dans les coordonnées de $\vec{m}$ et pas dans celles de $\vec{n}$ montre que ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les plans $\boxed{\mathcal{P} \text{ et (HMF) ne sont pas parallèles.}}$

3) Dans le R.O.N., on a $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ dirige (DG).

Comme $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in (DG)$, on obtient :

$$\boxed{(DG) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

4) $N \in (DG) \cap (HMF)$, d'où :

$$\begin{cases} 2x_N + 6y_N + 3z_N - 9 = 0 \\ x_N = 3t_N \\ y_N = 1 \\ z_N = t_N \end{cases}$$

$\Rightarrow 2 \times 3t_N + 6 \times 1 + 3 \times t_N - 9 = 0$

$\Rightarrow 6t_N + 6 + 3t_N - 9 = 0$

$\Rightarrow 9t_N - 3 = 0$

$\Rightarrow t_N = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Puis $\begin{cases} x_N = 3t_N = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \\ y_N = 1 \\ z_N = t_N = \frac{1}{3} \end{cases}$

D'où $\boxed{(DG) \cap (HMF) = \left\{ \mathbf{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1/3\end{pmatrix} \right\}}$

5) * Vérifions dans un premier temps si $R\begin{pmatrix}3\\1/4\\1/2\end{pmatrix}$ appartient au plan (HMF).

$2x_R + 6y_R + 3z_R - 9 = 2 \times 3 + 6 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} - 9 = 6 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 9 = 0$

Donc $R \in (HMF)$.

* Vérifions ensuite si $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}0\\3/4\\1/2\end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ normal à (HMF).

La présence d'un 0 dans les coordonnées de $\overrightarrow{RG}$ mais pas dans celles de $\vec{n}$ permet de conclure que $\overrightarrow{RG}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

* Conclusion : $\boxed{\text{R n'est pas le projeté orthogonal de G sur (HMF).}}$

Ex 3 :

$\forall x \in [0;1]$, $g(x) = 2x - x^2$

1) g est une fonction polynôme dérivable sur son ensemble de définition $[0;1]$

$\forall x \in [0;1]$, $g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$

Puis $g'(x) \geqslant 0 \iff 2(1-x) \geqslant 0 \iff 1-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$

Ainsi g' est strictement positive sur $[0;1[$ et s'annule ponctuellement en 1,

donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0;1]}$

Par ailleurs, on a $\begin{cases} g(0) = 2\times 0 - 0^2 = 0 - 0 = \boxed{0} \\ g(1) = 2\times 1 - 1^2 = 2 - 1 = \boxed{1} \end{cases}$

2) On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

D'où $u_1 = g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

Puis $u_2 = g(u_1) = g\left(\frac{3}{4}\right) = 2\times\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{24}{16} - \frac{9}{16} = \boxed{\frac{15}{16}}$

3) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

* Initialisation : Pour $n = 0$, on a $0 < u_0 < u_1 < 1$ car $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{3}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$
et montrons que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

On a (HR) : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

$\Rightarrow g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$ ↲ par stricte croissance de g

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ ↲ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.

* Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < u_{n+1} < 1}$

4) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} > u_n \quad \text{donc } (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n < 1 \quad \text{donc } (u_n) \text{ est majorée (par 1)} \end{cases}$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [0;1]$.

5) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ et g est continue sur $[0;1]$

Donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \ell = g(\ell) &\iff \ell = 2\ell - \ell^2 \\ &\iff \ell^2 - \ell = 0 \\ &\iff \ell(\ell - 1) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell - 1 = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 \end{aligned}$$

Or (u_n) est strictement croissante et $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, donc seule la solution $\ell = 1$ convient. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1 - u_n)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(1 - u_{n+1}) \\ &= \ln\left(1 - (2u_n - u_n^2)\right) \\ &= \ln(1 - 2u_n + u_n^2) \\ &= \ln\left((1 - u_n)^2\right) \\ &= 2\ln(1 - u_n) \\ &= 2 \cdot v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 2}$

Son premier terme est $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\ln 2}$

7) On déduit de la question précédente que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{-\ln(2) \times 2^n}$

8) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(1-u_n)$

$\iff e^{v_n} = e^{\ln(1-u_n)}$

$\iff 1-u_n = e^{v_n}$

$\iff \boxed{u_n = 1 - e^{-\ln(2)\times 2^n}}$

Puis on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (suite géométrique de raison $q>1$)

Par produit, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(2)\times 2^n = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, on a par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\ln(2)\times 2^n} = 0^+$

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0^+ = \boxed{1}$

<u>Rem :</u> On pouvait également simplifier u_n :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^n} = 1 - \left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^{(2^n)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(2^n)}$

On avait ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0^+$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0^+ = 1$

9) On obtient le script suivant, puis le résultat dans la console (non demandé) :

```python
def seuil():
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95:
        n=n+1
        u=2*u-u*u
    return n
```

```
>>> seuil()
3
```

Ex 4 :

1) Soit $a > 0$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a . \ln x$

On veut $f(x) = 0 \iff a . \ln x = 0$

$\iff \ln x = 0$) car $a \neq 0$

$\iff x = 1$

Ainsi , $\boxed{\mathcal{C} \cap (O; \vec{\imath}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = a\left(x . \ln(x) - x\right)$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = a\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right) = a\left(\ln(x) \cancel{+1} \cancel{-1}\right) = f(x)$

Donc $\boxed{\text{F est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

3) Soit $x \in]1; +\infty[$, en notant $\mathcal{D}$ l'aire du domaine grisé, on a :

$$\mathcal{D} = \int_1^{x_0} f(x) . dx = \left[F(x)\right]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1)$$

$$\iff \mathcal{D} = a\left(x_0 \ln(x_0) - x_0\right) - a\left(1 \times \ln(1) - 1\right) = \boxed{a\left(x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1\right)}$$

4) * Commençons par déterminer l'équation de T, tangente à $\mathcal{C}$ au pt d'abscisse x_0.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{a}{x}$

D'où T : $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$

$\iff y = \frac{a}{x_0}\left(x - x_0\right) + a \ln(x_0)$

$\iff y = \frac{a}{x_0} . x - a + a \ln(x_0)$

* le point A est le point de T d'abscisse $x_A = 0$

D'où $y_A = \frac{a}{x_0} \times x_A - a + a\ln(x_0) = -a + a\ln(x_0)$

* le point B est le projeté orthogonal de M sur $(O;\vec{j})$,

Donc $x_B = 0$ et $y_B = y_M = f(x_M) = f(x_0) = a.\ln(x_0)$

* les points A et B ayant la même abscisse $(x_A = x_B = 0)$,

On a : $\forall a > 0$, $AB = |y_B - y_A|$

$$= |a.\ln(x_0) - (-a + a\ln(x_0))|$$

$$= |\cancel{a.\ln(x_0)} + a - \cancel{a\ln(x_0)}|$$

$$= |a|$$

$$= \boxed{a} \quad \text{car } a > 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{la distance } AB \text{ est constante}}$ (et ne dépend donc pas de x_0).