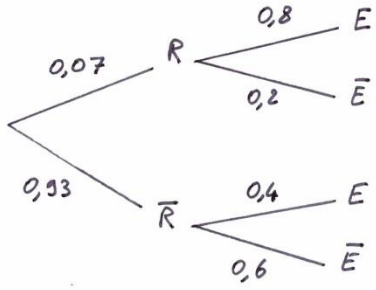
Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



$P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}056}$

2) $\{R\,;\overline{R}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(R \cap E) + P(\overline{R} \cap E) \\ &= 0{,}056 + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) \\ &= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}056 + 0{,}372 \\ &\boxed{= 0{,}428} \end{aligned}$$

3) $P_E(R) = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} = \dfrac{56}{428} \boxed{= \dfrac{14}{107} \simeq 0{,}131}$ (à 10^{-3} près)

⇒ Partie B :

1) On répète $n = 30$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "obtenir un objet rare" est de $p = 0{,}07$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}07$.

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(30\,;\ 0{,}07)}$

Puis $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}07 = \boxed{2{,}1}$

2) $P(X<6) = P(X\leqslant 5) \simeq 0,984$ (à 10^{-3} près) avec la fonction de répartition de la calculatrice.

3) $P(X\geqslant k) = 1-P(X<k) = 1-P(X\leqslant k-1)$

Ainsi, $P(X\geqslant k)\geqslant 0,5 \iff 1-P(X\leqslant k-1)\geqslant 0,5$

$\iff P(X\leqslant k-1)\leqslant 0,5$

La fonction de répartition étant croissante, il faut tester à la calculatrice avec des valeurs de k croissantes, sachant que l'on cherche la plus grande valeur de k pour laquelle $P(X\leqslant k-1)$ reste en dessous de 0,5.

* Pour $k=1$, on a $P(X\leqslant 1-1) = P(X\leqslant 0) \simeq 0,11 \leqslant 0,5$
* Pour $k=2$, on a $P(X\leqslant 2-1) = P(X\leqslant 1) \simeq 0,37 \leqslant 0,5$
* Pour $k=3$, on a $P(X\leqslant 3-1) = P(X\leqslant 2) \simeq 0,65 \geqslant 0,5$

Donc la valeur recherchée est $\boxed{k=2}$

Interprétation : La probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure ou égale à 0,5.

4) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(N\,;0,07)$

On veut $P(X\geqslant 1)\geqslant 0,95 \iff 1-P(X=0)\geqslant 0,95$

$\iff 1-\binom{N}{0}\times 0,07^0\times(1-0,07)^{N-0}\geqslant 0,95$

$\iff 1-1\times 1\times 0,93^N\geqslant 0,95$

$\iff 0,93^N\leqslant 0,05$

$\iff \ln(0,93^N)\leqslant \ln 0,05$ } par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff N.\ln 0,93\leqslant \ln 0,05$

$\iff N\geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$ } car $\ln 0,93<0$

or on a $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}\simeq 41,3$ et on veut $N\in\mathbb{N}$, donc il faut $\boxed{\text{au moins } 42}$ objets à tirer pour atteindre l'objectif.

Ex 2 :

$\boxed{1)\ C}$

On a $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$ dirige (AB)

En utilisant les coordonnées du point A, on retrouve la réponse ©

$\boxed{2)\ D}$

Il faut tester les coordonnées des points proposés dans la représentation paramétrique de (d).
Si on trouve une valeur de t solution du système, alors il s'agit du paramètre du point sur la droite (d).

$$\begin{cases} x_M = 3+4t \\ y_M = 6t \\ z_M = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 7 = 3+4t \\ 6 = 6t \\ 6 = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 4 \\ 6t = 6 \\ -2t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

incompatibles donc $M \notin (d)$

$N\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ ne conviennent pas non plus.

$$\begin{cases} x_R = 3+4t \\ y_R = 6t \\ z_R = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} -3 = 3+4t \\ -9 = 6t \\ 7 = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = -6 \\ t = \frac{-9}{6} \\ -2t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc $R\begin{pmatrix}-3\\-9\\7\end{pmatrix} \in (d)$

Il s'agit du point de (d) de paramètre $t = \frac{-3}{2}$

$\boxed{3)\ B}$

(d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ ou $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, et (d') par $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas proportionnelles, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi (d) et (d') ne sont ni parallèles (strictement), ni confondues. Etudions alors l'intersection des deux droites pour choisir entre les réponses A et B.

$$(d)\cap(d') : \begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 1+3k \\ 6t = -1-2k \\ -2t = -3+k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{4}(1+3k) \\ t = \frac{1}{6}(-1-2k) \\ 0 = 1+3k-6+2k \quad (L_1+2L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{4}(1+3k) \\ t = \frac{1}{6}(-1-2k) \\ 5k = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=1 \\ t = \frac{1}{4}(1+3\times 1) = \frac{1}{4}\times 4 = 1 \\ t = \frac{1}{6}(-1-2\times 1) = \frac{1}{6}\times(-3) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ incompatibles

Donc $(d)\cap(d') = \emptyset$

$\boxed{4)\ A}$

$\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (P) et $I\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\in P$, donc $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P$ ssi

$$\vec{u'}\cdot\overrightarrow{IM} = 0 \iff 2(x-2)+3(y-1)+(-1)\times(z-0) = 0$$
$$\iff 2x-4+3y-3-z = 0$$
$$\iff 2x+3y-z-7 = 0 \implies \text{Réponse } A$$

Ex 3 :

⇒ Partie A :

1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $x_A = 1$.

Il s'agit donc du coefficient directeur de (T).

Pour aller de B à A, quand x augmente de $\Delta x = 1$, y augmente de $\Delta y = 3$. D'où $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$

On lit ensuite l'ordonnée à l'origine avec le point $B\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

D'où (T) : $y = f'(1) \times x + y_B$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 3x - 4}$

2) Il semble que $\boxed{f \text{ soit concave sur }]0;1] \text{ et convexe sur } [1;+\infty[}$

Le point $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ semble donc être $\boxed{\text{le point d'inflexion de } \mathcal{C}_f.}$

⇒ Partie B :

1) * En $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ puis par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, donc par différence $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

* En 0^+ : $x \ln(x^2)$ est une F.I. du type "$0 \times \infty$" au voisinage de 0^+.

On $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$ (th. croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$

Par somme, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

2) a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + x \times 2x \times \frac{1}{x^2} - \frac{-1}{x^2}$

$= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$

$= \boxed{2\ln(x) + 2 + \frac{1}{x^2}}$

b) On admet que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 0 - \frac{2x}{(x^2)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}$

$\iff f''(x) = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 2 \cdot \frac{x^2-1}{x^3} = \boxed{\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$ et $x+1 > 0$

Donc f'' est du signe de $x-1$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \geqslant 0 \iff x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	||	concave		convexe	

A(1 ; -1)
pt d'inflexion

ceci confirme la conjecture émise dans la partie A

b) D'après le tableau précédent, on a :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$\searrow$	3	$\nearrow$	

$\left(f'(1) = 2\ln(1) + 2 + \frac{1}{1^2} = 2 \times 0 + 2 + 1 = 3 \right.$

f' est minorée par 3 (f'' s'annule et change de signe (- vers +) en $x=1$),

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad f'(x) > 0}$ (par transitivité).

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

4) ⓐ f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question B.1), on a $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$

Or $0 \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection,

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*}$, notée α.

ⓑ Par balayage, on a :

$f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ donc $1 < \alpha < 2$

$f(1{,}3) < 0$ et $f(1{,}4) > 0$ donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$

$f(1{,}32) < 0$ et $f(1{,}33) > 0$ donc $1{,}32 < \alpha < 1{,}33$

$f(1{,}327) < 0$ et $f(1{,}328) > 0$ donc $1{,}327 < \alpha < 1{,}328$

Ainsi $\boxed{\alpha \simeq 1{,}33}$ (à 10^{-2} près)

Puis $f(\alpha) = 0 \iff \alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0 \iff \alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$

$\iff \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2} \iff \boxed{\alpha^2 = e^{\frac{1}{\alpha^2}}}$

Ex4:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} . \sin x . dx \quad$ et $\quad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} . \cos x . dx$

1) $I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0x} . \sin x . dx = \int_0^{\pi} \sin x . dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi}$

ssi $I_0 = -(\cos \pi - \cos 0) = \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = \boxed{2}$

2) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; \pi], \quad e^{-nx} > 0$

De plus, $\forall x \in [0, \pi], \quad \sin x \in [0; 1]$ donc $\sin x \geqslant 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; \pi], \quad e^{-nx} . \sin x \geqslant 0$

Puis par positivité de l'intégrale, les deux bornes étant écrites dans l'ordre croissant, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi} e^{-nx} . \sin x \, dx \geqslant 0 \quad$ i.e. $\quad \boxed{I_n \geqslant 0}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x} . \sin x . dx - \int_0^{\pi} e^{-nx} . \sin x . dx$

par linéarité de l'intégrale

$= \int_0^{\pi} \left(e^{-(n+1)x} . \sin x - e^{-nx} . \sin x\right) dx$

$= \int_0^{\pi} \left(e^{-x} . e^{-nx} . \sin x - 1 \times e^{-nx} . \sin x\right) dx$

$= \int_0^{\pi} \left(e^{-x} - 1\right) . e^{-nx} . \sin x . dx$

Nous avons déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;\pi]$, $e^{-nx}.\sin x \geqslant 0$

Puis soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff e^{-x} \geqslant e^0$

$$\iff -x \geqslant 0$$

$$\iff x \leqslant 0$$

Ainsi, $\forall x \in [0;\pi]$, $e^{-x} - 1 \leqslant 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;\pi]$, $(e^{-x}-1).e^{-nx}.\sin x \leqslant 0$

Par croissance de l'intégrale sur $[0;\pi]$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi} (e^{-x}-1).e^{-nx}.\sin x.\,dx \leqslant 0 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$$

ⓒ (I_n) est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ i.e. $I_{n+1} \leqslant I_n$

De plus, (I_n) est minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 0$.

3) ⓐ On a : $\forall x \in [0;\pi]$, $\sin x \leqslant 1$

$$\Rightarrow e^{-nx}.\sin x \leqslant e^{-nx}$$

car $\forall x \in [0;\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} > 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} e^{-nx}.\sin x.\,dx \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}.\,dx$$

par croissance de l'intégrale avec $0 < \pi$

$$\Rightarrow \boxed{I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}.\,dx}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}.\,dx = \frac{-1}{n}\int_0^{\pi} -n.e^{-nx}.\,dx$

$$= \frac{-1}{n}\left[e^{-nx}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{n}\left(e^{-n\pi} - e^0\right)$$

$$= \boxed{\frac{1 - e^{-n\pi}}{n}}$$

(c) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n\pi = -\infty$ puis par composition : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n\pi} = 0^+$

Par différence, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n\pi} = 1 - 0 = 1$

Enfin, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-n\pi}}{n} = 0^+$

Par ailleurs, d'après les questions précédentes, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1 - e^{-n\pi}}{n}$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes (th. d'encadrement),

on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

4) ⓐ Tout d'abord, posons les fonctions u et v continûment dérivables sur $[0 ; \pi]$:

$$u(x) = e^{-nx} \quad \text{et} \quad v'(x) = \sin x$$

$$u'(x) = -n\, e^{-nx} \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos x$$

Par IPP, on obtient :

$$I_n = \left[-e^{-nx} \cdot \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -n \cdot e^{-nx} \times (-\cos x) \cdot dx$$

$$= \left[e^{-nx} \cos x\right]_{\pi}^{0} - n \int_0^{\pi} e^{-nx} \times \cos x \cdot dx$$

$$= e^{0} \cdot \cos 0 - e^{-n\pi} \cdot \cos \pi - n \cdot J_n$$

$$= 1 \times 1 - e^{-n\pi} \times (-1) - n J_n$$

$$= \boxed{1 + e^{-n\pi} - n J_n}$$

Puis posons les fonctions f et g continûment dérivables sur $[0 ; \pi]$, avec $n \neq 0$

$$f(x) = \sin x \quad \text{et} \quad g'(x) = e^{-nx}$$

$$f'(x) = \cos x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-1}{n} \cdot e^{-nx}$$

Par IPP, on obtient :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} \cdot e^{-nx} \cdot \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n} \cdot e^{-nx} \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= \left[\frac{1}{n} e^{-nx} \cdot \sin x\right]_{\pi}^{0} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = \left(\frac{1}{n} \cdot e^0 \cdot \sin 0 - \frac{1}{n} e^{-n\pi} \cdot \sin \pi\right) + \frac{1}{n} J_n$$

$$= \frac{1}{n} \times 1 \times 0 - \frac{1}{n} \times e^{-n\pi} \times 0 + \frac{1}{n} J_n$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{n} J_n$$

$$= \boxed{\frac{1}{n} \cdot J_n}$$

b) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n} \cdot J_n \Leftrightarrow J_n = n \cdot I_n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n\, J_n$

$$\Leftrightarrow I_n = 1 + e^{-n\pi} - n \times n \times I_n$$ car $J_n = n \cdot I_n$

$$\Leftrightarrow I_n + n^2 I_n = 1 + e^{-n\pi}$$

$$\Leftrightarrow (1+n^2) \cdot I_n = 1 + e^{-n\pi}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 + n^2}}$$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + n^2 \neq 0$

5) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tq $I_n < 0{,}1$

Il faut donc écrire en ligne 5 une boucle conditionnelle "while" avec pour condition la négation de $I_n < 0{,}1$, i.e. $I_n \geqslant 0{,}1$

En effet, la boucle doit continuer à tourner tant que la condition $I_n < 0{,}1$ n'est pas atteinte.

Donc en ligne 5 : $\boxed{\texttt{while I >= 0.1 :}}$