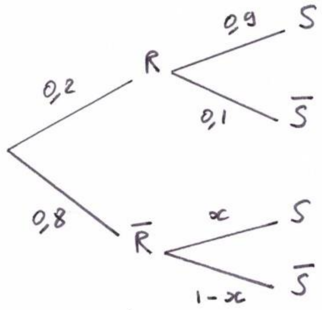
Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



2) $\{R ; \overline{R}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(R \cap S) + P(\overline{R} \cap S)$$

$$\Leftrightarrow P(S) = P(R) \times P_R(S) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(S)$$

$$\Leftrightarrow 0,82 = 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times x$$

$$\Leftrightarrow 0,8x = 0,82 - 0,18$$

$$\Leftrightarrow 0,8x = 0,64$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0,64}{0,8} = \frac{64}{80} = \frac{8}{10} = \boxed{0,8}$$

3) $$P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{18}{82} = \frac{9}{41} \boxed{\simeq 0,22} \quad (\text{à } 10^{-2} \text{ près})$$

⇒ Partie B :

1) ⓐ On a : $\boxed{n = 5 \text{ et } p = P(S) = 0,82}$, d'où $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,82)$

ⓑ $\boxed{P(X \leqslant 3) \simeq 0,222}$ (à 10^{-3} près) en utilisant la fonction de répartition de la calculatrice.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a désormais $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}82)$

$$p_n = P(X = n) = \binom{n}{n} \times 0{,}82^n \times (1-0{,}82)^{n-n} = 1 \times 0{,}82^n \times 0{,}18^0$$
$$= 0{,}82^n \times 1$$
$$= \boxed{0{,}82^n}$$

b) On veut $n \in \mathbb{N}^*$ tq $p_n < 0{,}01$

$p_n < 0{,}01 \iff 0{,}82^n < 0{,}01$

$\iff \ln(0{,}82^n) < \ln 0{,}01$ car ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \ln 0{,}82 < \ln 0{,}01$

$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}82}$ car $\ln 0{,}82 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}82} \simeq 23{,}2$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant 24\} = [24\,;+\infty[\, \cap\, \mathbb{N}}$

Interprétation :

Il faut un échantillon d'au moins $n = 24$ clients pour que la probabilité qu'ils soient tous satisfaits de leur achat devienne strictement inférieure à 0,01, i.e. à 1%.

Ex 2 :

Soit (u_n) : $\quad u_0 = 8 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5}$

1) $u_1 = \dfrac{6 \times u_0 + 2}{u_0 + 5} = \dfrac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \boxed{\dfrac{50}{13}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \; f(x) = \dfrac{6x + 2}{x + 5}$

a) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; f'(x) = \frac{6(x+5) - 1 \times (6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{6x + 30 - 6x - 2}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \; f'(x) > 0$

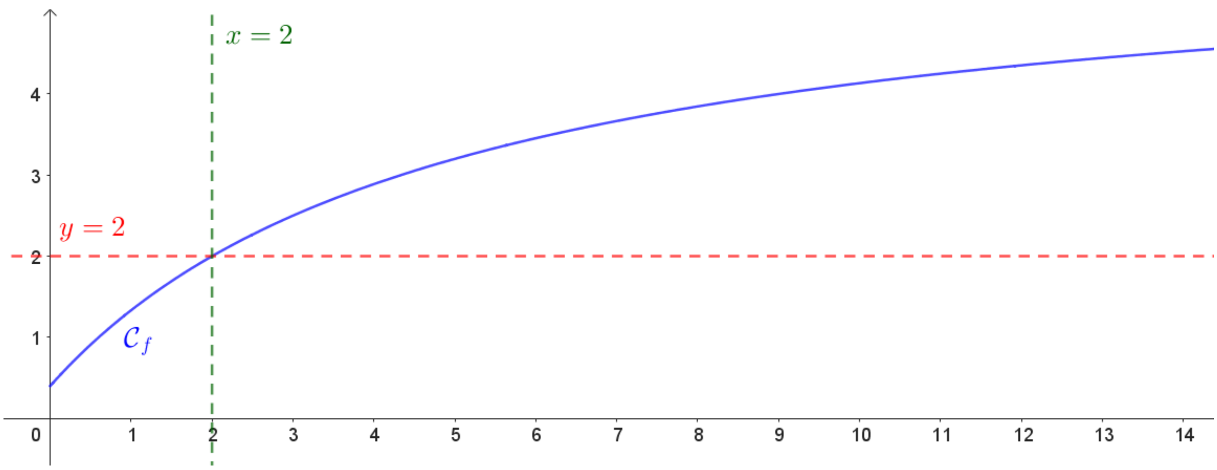
Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

Puis on a : $f(2) = \dfrac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \dfrac{14}{7} = 2$

Ainsi, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$x > 2 \implies f(x) > f(2) \implies f(x) > 2$$

D'où $\boxed{\forall x > 2, \; f(x) > 2}$



b) On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 8 > 2 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 2$ et montrons que $u_{n+1} > 2$

On utilise la question précédente : $u_n > 2 \Rightarrow f(u_n) > 2$
$\Rightarrow u_{n+1} > 2$
$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,
donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2}$

3) a) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$

Or d'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 2 - u_n < 0 \\ u_n + 1 > 3 > 0 \\ u_n + 5 > 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ est (strictement) décroissante}}$

b) (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 2$.

De plus, comme toute suite décroissante est majorée par son premier terme, ici $u_0 = 8$, on a : $\ell \in [2\,;8]$

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a) $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5} - 2\,\dfrac{u_n+5}{u_n+5}}{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5} + \dfrac{u_n+5}{u_n+5}}$

$\Leftrightarrow\ v_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2 - 2u_n - 10}{6u_n + 2 + u_n + 5} = \dfrac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \dfrac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)}$

$\Leftrightarrow\ v_{n+1} = \dfrac{4}{7} \cdot v_n$

D'où $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{4}{7}}$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$

Or $\dfrac{4}{7} \in \,]0\,;1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{7}\right)^n = 0^+$

Puis par produit, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0^+}$

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ $\Leftrightarrow\ (u_n + 1)\, v_n = u_n - 2$

$\Leftrightarrow\ u_n \cdot v_n + v_n - u_n = -2$

$\Leftrightarrow\ u_n (v_n - 1) = -v_n - 2$

$\Leftrightarrow\ u_n = \dfrac{-v_n - 2}{v_n - 1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 1$

Puis par opérations sur les limites, on en déduit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-v_n - 2}{v_n - 1} = \dfrac{-0-2}{0-1} = \dfrac{-2}{-1} = \boxed{2}$

Rem : On pourrait également utiliser le fait que (u_n) converge vers $\ell \in [2;8]$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

⚠ Implication simple

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

car (u_n) converge

$$\Rightarrow 0 = \frac{\ell - 2}{\ell + 1}$$

car $\ell \in [2;8] \Rightarrow \ell + 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \ell - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = 2}$$

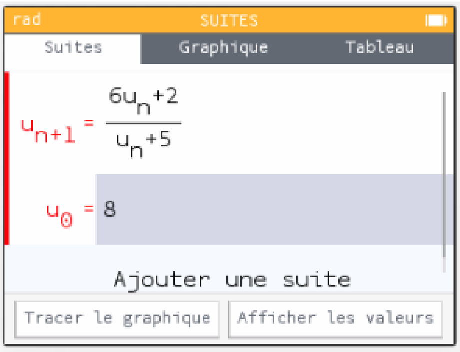
5) La commande seuil(2.001) va renvoyer $\boxed{n = 14}$

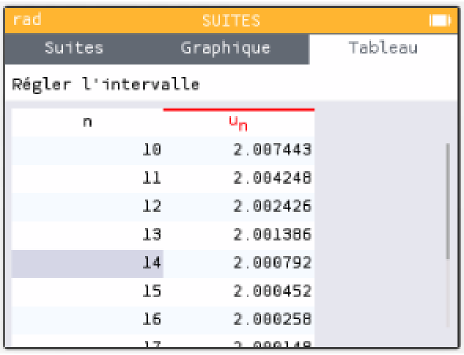
Il s'agit de la plus petite valeur de n à partir de laquelle la valeur u_n de la suite (u_n) atteint ou passe en dessous du seuil $A = 2,001$

```python
def seuil(A):
    n=0
    u=8
    while u>A:
        u=(6*u+2)/(u+5)
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil(2.001)
14
```

Sans lancer le programme Python, on peut également obtenir ou vérifier ce résultat à l'aide du menu « Suites » de la calculatrice :





Ex 3 :

1) (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et passe par $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

D'où (d) : $\begin{cases} x = 1 + 0\times t \\ y = 1 + 2\times t \\ z = 0 + (-1)\times t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ i.e. $\boxed{(d) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

Ne pas oublier

2) Notons $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ d'éq. $x+4y+2z+1=0$

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires (présence du 0 dans la 1ère coordonnée de $\vec{u}$ mais pas dans celle de $\vec{w}$) donc **(d) et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point.**

Montrons alors que les coordonnées de $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (d).

On a : $x_B + 4y_B + 2z_B + 1 = 1 + 4\times(-1) + 2\times 1 + 1 = 1 - 4 + 2 + 1 = 0$

Donc $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

Puis $\begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 1+2t \\ z_B = -t \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 1 \\ -1 = 1+2t \\ 1 = -t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -2 \\ t = -1 \end{cases} \iff t = -1$

D'où $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in (d)$, il s'agit du point de (d) de paramètre $t=-1$

Ainsi, $\boxed{(d) \cap \mathcal{P} = \left\{ B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}}$

Rem : On pouvait également résoudre le système contenant l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (d) pour retrouver les coordonnées de l'intersection $B(1;-1;1)$

3) ⓐ Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car leurs deux premières coordonnées sont égales mais pas la 3ème.

D'où $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ définissent le plan } (ABC)}$

ⓑ Dans le R.O.N., on donne $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

On a : $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times 0 + 0\times(-2) + 0\times 1 = 0+0+0 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 0 + 0\times(-2) + 0\times(-1) = 0+0+0 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires qui dirigent le plan (ABC), d'où $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ est normal à } (ABC)}$

ⓒ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est normal à (ABC), donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme $1\times x + 0\times y + 0\times z + d = 0$ i.e. $x + d = 0$

Puis $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in (ABC) \iff x_A + d = 0 \iff 1 + d = 0 \iff d = -1$

D'où (ABC) : $\boxed{x - 1 = 0}$

4) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{0^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{5} \text{ u.l.} \\ AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{0^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \text{ u.l.} \end{cases} \Rightarrow AB = AC$

D'où $\boxed{ABC \text{ est un triangle isocèle en } A}$

ⓑ H milieu de [BC] donc $\begin{cases} x_H = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ y_H = \frac{1}{2}(y_B + y_C) = \frac{1}{2}(-1+(-1)) = -1 \\ z_H = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = \frac{1}{2}(1+(-1)) = 0 \end{cases}$ i.e. $H\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\overrightarrow{AH}^2} = \sqrt{0^2+(-2)^2+0^2} = |-2| = \boxed{2 \text{ u.l.}}$

On a H milieu de [BC] donc (AH) est la médiane du triangle ABC relative au segment [BC].

Or ABC est isocèle en A, donc la médiane (AH) est également médiatrice et hauteur du triangle ABC relativement au segment [BC]

Ainsi, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \times AH$

Or $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{0^2+0^2+(-2)^2} = 2$ u.l.

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \boxed{2 \text{ u.a.}}$

5) ⓐ Dans le R.O.N., on a $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

Ainsi, $\overrightarrow{BD} = -\vec{m}$ donc $\overrightarrow{BD}$ est normal au plan (ABC)

i.e. $(BD) \perp (ABC)$

D'où $\boxed{\text{(BD) est la hauteur de la pyramide ABCD relative à la base ABC.}}$

ⓑ On a $BD = \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{\overrightarrow{BD}^2} = \sqrt{(-1)^2+0^2+0^2} = 1$ u.l.

Puis $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times BD = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u.v.}}$

Ex 4 :

$\boxed{1)\ C}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x\,e^{x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\left(1 \times e^{x} + x \times e^{x}\right) = 2e^{x}(1+x)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0$, f' est du signe de $1+x$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0^-	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^{x} = 0^-$ (th. croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^- > -\frac{73}{100}$

puis $f(-1) = 2 \times (-1) \times e^{-1} = -2 \times e^{-1} = \frac{-2}{e} \simeq -0,736 < -\frac{73}{100}$

et enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La fct f étant continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, une disjonction de cas sur $]-\infty\,;-1]$ et $]-1\,;+\infty[$ permet de conclure à l'aide du théorème de la bijection que l'équation $f(x) = -\frac{73}{100}$ admet une unique solution sur chaque intervalle, donc exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2)\ A}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

Ce n'est pas une F.I.

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \end{cases} \Rightarrow$ Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\boxed{3)\ B}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = (4x-16)\, e^{2x}$

La fct h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée puis produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ h'(x) = 4 \times e^{2x} + (4x-16) \times 2e^{2x} = (8x-28)\, e^{2x}$
$= 4(2x-7)\, e^{2x}$

Puis h' est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons que précédemment

$\forall x \in \mathbb{R}, \ h''(x) = 4\left(2e^{2x} + (2x-7) \times 2e^{2x}\right) = 8(2x-6)\, e^{2x}$
$= 16(x-3)\, e^{2x}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ 16e^{2x} > 0$ donc h'' est du signe de $x-3$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		concave	inflexion	convexe	

$\boxed{4)\ B}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad k(x) = 3\ln(x) - x$

La fct k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$

D'où $k'(e) = \frac{3-e}{e}$ et $k(e) = 3\ln(e) - e = 3 \times 1 - e = 3 - e$

Ainsi, on a : $T: \quad y = k'(e) \times (x - e) + k(e)$

$\Leftrightarrow y = \frac{3-e}{e}(x - e) + 3 - e$

$\Leftrightarrow y = \frac{3-e}{e}x - \cancel{(3-e)} + \cancel{3-e}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3-e}{e}x$

$\boxed{5)\ C}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln x)^2 + 10\ln(x) + 21 = 0 \qquad (E)$

On pose $X = \ln x$, d'où $(E) \Leftrightarrow X^2 + 10X + 21$

$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16$

Puis $\begin{cases} X_1 = \frac{-10 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-10-4}{2} = -7 \\ X_2 = \frac{-10 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-10+4}{2} = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_1 = -7 \\ \ln x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = e^{-7} \\ x_2 = e^{-3} \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \left\{ e^{-7} ; e^{-3} \right\}$