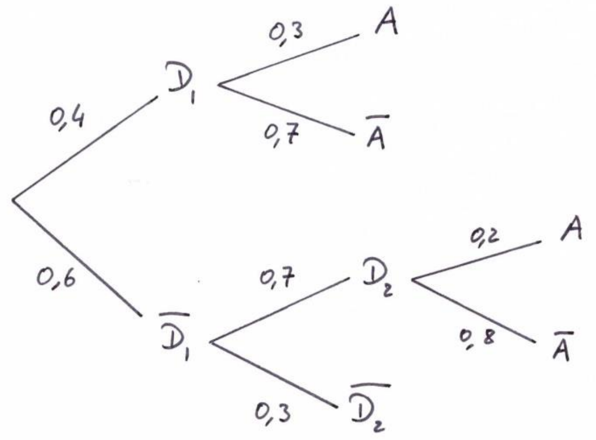
Ex1 :

⇒ Partie A :

1)




2) $\{D_1 \,;\, \overline{D_1}\}$ forme un système complet d'évènements.

On utilise la formule des probabilités totales en l'adaptant à l'arbre particulier de cet exercice :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap (D_2 \cap A)) \\
&= P(D_1) \times P_{D_1}(A) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2 \cap A) \\
&= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \times P_{D_2}(A) \\
&= 0,12 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 \\
&= 0,12 + 0,084 \\
&= \boxed{0,204}
\end{aligned}$$

3) $P_A(D_1) = \dfrac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,204} = \dfrac{120}{204} = \dfrac{30}{51} = \boxed{\dfrac{10}{17}}$ ⚠ Aucun arrondi demandé

⇒ Partie B :

1) ⓐ $\boxed{n = 30 \text{ et } p = P(A) = 0{,}204}$ donc $X \sim \mathcal{B}(30\,;\,0{,}204)$

ⓑ $P(X=6) = \binom{30}{6} \times p^6 \times (1-p)^{30-6} = 593\,775 \times 0{,}204^6 \times 0{,}796^{24}$

$\boxed{\simeq 0{,}179}$ (à $10^{-3}$ près)

ⓒ $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}204 = 3 \times 2{,}04 = \boxed{6{,}12}$

Dans un échantillon de 30 personnes, en moyenne, il y en a environ 6 qui achetent le produit.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère désormais $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}204)$

On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

$\iff 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99$

$\iff P(X=0) \leqslant 0{,}01$

$\iff \binom{n}{0} \times 0{,}204^0 \times (1-0{,}204)^{n-0} \leqslant 0{,}01$

$\iff 1 \times 1 \times 0{,}796^n \leqslant 0{,}01$

$\iff \ln(0{,}796^n) \leqslant \ln 0{,}01$ car ln est strict croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \ln 0{,}796 \leqslant \ln 0{,}01$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}796}$ car $\ln 0{,}796 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}796} \simeq 20{,}2$ Donc il faut au moins $\boxed{n = \mathbf{21}}$ personnes.

Ex 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) = 3x + 1 - 2x\ln x$

1) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ (th. croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x+1 = 1$

Donc par opérations sur les limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1}$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$"

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) = x\left(3 - 2\ln x\right) + 1$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x = -\infty$

Puis par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x(3 - 2\ln x) = -\infty$

Et enfin par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2) ⓐ On admet dans l'énoncé que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) = 3 + 0 - 2\left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 3 - 2(\ln(x) + 1)$

$= 3 - 2 - 2\ln x$

$= \boxed{1 - 2\ln x}$

ⓑ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - 2\ln x \geqslant 0 \iff 2\ln x \leqslant 1 \iff \ln x \leqslant \frac{1}{2} \iff x \leqslant \sqrt{e}$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $1$ | ↗ | $1+2\sqrt{e}$ | ↘ | $-\infty$ |

$f(e^{\frac{1}{2}}) = 3 \times e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}}\ln(e^{\frac{1}{2}})$

$= 3\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e} \times \frac{1}{2}$

$= 3\sqrt{e} + 1 - \sqrt{e}$

$= 1 + 2\sqrt{e}$

3) ⓐ Procédons par disjonction de cas :

* Sur $]0;\sqrt{e}]$, $f$ est minorée par $1>0$ $\left(\begin{array}{l} f \text{ est strict. croissante et} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{array}\right)$

Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

* Sur $]\sqrt{e};+\infty[$, $f$ est <u>continue</u> et <u>strictement décroissante</u>

De plus, $0\in\,]-\infty;1+2\sqrt{e}[\,=\,]\lim_{x\to+\infty}f(x);f(\sqrt{e})[\,=f(]\sqrt{e};+\infty[)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]\sqrt{e};+\infty[$

* Conclusion : $\boxed{\exists!\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ f(\alpha)=0}$

ⓑ On déduit des deux dernières questions le tableau de signes de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | \|\| | | $+$ | | $0$ | $-$ | |

avec $\alpha>\sqrt{e}$

4) Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F'(x)=f(x)$

Or $\forall x\in[\sqrt{e};\alpha[$, $f(x)>0$

Donc $F$ est strictement croissante sur $[\sqrt{e};\alpha[\,\subset[e^{\frac{1}{2}};+\infty[$

Ainsi l'affirmation "$F$ strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}};+\infty[$" est $\boxed{\text{fausse.}}$

5) (a) D'après l'énoncé, on admet que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - 2\ln x$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = 0 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{-2}{x} < 0$

Donc $\boxed{f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*}$

Ainsi, par définition, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est située en dessous de toutes ses tangentes.}}$

(b) On a : $f'(1) = 1 - 2 \times \ln 1 = 1 - 2 \times 0 = 1$

et $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln 1 = 3 + 1 - 2 \times 0 = 4$

D'où $T$ : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$\iff y = 1 \times (x-1) + 4$

$\iff y = x - 1 + 4$

$\iff \boxed{y = x + 3}$

(c) $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en dessous de $T$ d'équation $y = x + 3$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant x + 3 \iff 3x + 1 - 2x\ln x \leqslant x + 3$

$\iff 2x\ln x \geqslant 2x - 2$

$\iff x \ln x \geqslant x - 1$

$\iff \ln x \geqslant \frac{x-1}{x}$ } car $x > 0$ ⚠

$\iff \boxed{\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}}$

Ex 3 :

⇒ Partie A : Soit $(u_n)$ : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$

$\boxed{1)\ A}$

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\times 0 + 1 = \frac{1}{2}\times 3 + 0 + 1 = \frac{5}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}\times 1 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4} + \frac{6}{4} = \frac{11}{4}$

$\boxed{2)\ B}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \cancel{+1} - n \cancel{-1}$$

$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - n)$$

$$= \frac{1}{2}v_n$$ D'où $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Rem : On pouvait commencer par calculer les premiers termes de $(v_n)$ pour faire une conjecture.

$\boxed{3)\ D}$

```
def terme(n):
    U=3
    for i in range(n):
        U=U/2+i/2+1
    return U
```

```
>>> terme(0)
3
>>> terme(1)
2.5
>>> terme(2)
2.75
```

Rem : En cas de doute, ne pas hésiter à écrire les 3 scripts sur la calculatrice pour comparer nos calculs de la première question avec les premiers termes renvoyés.

=> Partie B :

1) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant u_n \leqslant n+3$

Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 3$ qui vérifie $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+3$

=> $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n \leqslant u_n \leqslant n+3$

et montrons que $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+4$

On a : $n \leqslant u_n \leqslant n+3 \Rightarrow \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2} u_n \leqslant \frac{n+3}{2}$

$\Rightarrow \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n \leqslant \frac{n+3}{2} + \frac{n}{2}$

$\Rightarrow n \leqslant \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n \leqslant n + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow n+1 \leqslant \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n + 1 \leqslant n + \frac{3}{2} + 1$

$\Rightarrow n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{5}{2} \leqslant n+4$

=> $\mathcal{P}(n+1)$ vraie par transitivité

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant u_n \leqslant n+3}$

2) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$ donc d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant u_n \leqslant n+3 \Rightarrow \frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+3}{n}$

$\Rightarrow 1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{3}{n}$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement (th. des gendarmes), $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1}$

Ex 4 :

1) Dans le R.O.N. $(D\,;\,\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$, on a $\boxed{F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$

2) M est le centre du carré BCGF, donc M est le milieu de [CF]

D'où $\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(x_C + x_F) = \frac{1}{2}\,(0+1) = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{1}{2}(y_C + y_F) = \frac{1}{2}\,(1+1) = 1 \\ z_M = \frac{1}{2}(z_C + z_F) = \frac{1}{2}\,(0+1) = \frac{1}{2} \end{cases}$ i.e. $\boxed{M\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}}$

De même, N est le milieu de [FH], avec $H\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} x_N = \frac{1}{2}(x_F + x_H) = \frac{1}{2}\,(1+1) = 1 \\ y_N = \frac{1}{2}(y_F + y_H) = \frac{1}{2}\,(1+0) = \frac{1}{2} \\ z_N = \frac{1}{2}(z_F + z_H) = \frac{1}{2}\,(1+0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ i.e. $\boxed{N\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}}$

3) a) Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ; $G\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ; $H\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ; $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF} = 1\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 0+1-1 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{HF} \\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CF} = 1\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 1 = 1+0-1 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CF} \end{cases}$

$\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{CF}$ non colinéaires (car H, F et C ne sont pas alignés) qui dirigent (HFC), donc $\boxed{\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ est normal à (HFC)}}$.

b) Ainsi, (HFC) a une éq. cartésienne de la forme $1\times x + 1\times y + (-1)\times z + d = 0$
$\iff x + y - z + d = 0$

Or $H\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in (HFC) \iff x_H + y_H - z_H + d = 0 \iff 1+0-0+d = 0 \iff d = -1$

D'où (HFC) : $\boxed{x + y - z - 1 = 0}$

4) $(AG)$ est dirigée par $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et passe par $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où on peut donner une représentation paramétrique :

$$\boxed{(AG) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

5) On a $(AG) \perp (HFC)$

Donc le projeté orthogonal de $G \notin (HFC)$ sur $(HFC)$ est le point d'intersection de $(AG)$ et de $(HFC)$.

$(AG) \cap (HFC) : \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$

$\Rightarrow t + t - (1-t) - 1 = 0$

$\Rightarrow 2t - 1 + t - 1 = 0$

$\Rightarrow 3t = 2$

$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Puis $\begin{cases} x = t = \frac{2}{3} \\ y = t = \frac{2}{3} \\ z = 1-t = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

D'où $\boxed{R\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de } G \text{ sur } (HFC)}$

Rem : les coordonnées étant données dans l'énoncé, on pouvait également vérifier que $R\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix} \in (AG)$ <u>et</u> $R\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix} \in (HFC)$

6) Dans le R.O.N., on a $K\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$, car $K \in (FG)$

Puis comme $M\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ ont été calculés dans la question 2),

on a : $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}1/2\\0\\t-1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}0\\1/2\\t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Puis KMN est rectangle en K $\iff \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{NK} = 0$

$$\iff \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \times \left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\iff \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\iff t = \frac{1}{2} \quad \text{(solution double)}$$

L'équation ayant une unique solution, $\boxed{\exists ! K \in (FG), \text{ KMN rectangle en } K}$

K est le point de $(FG)$ de paramètre $t = \frac{1}{2}$

D'où $\begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = 1 \\ z_K = t_K = \frac{1}{2} \end{cases}$ i.e. $\boxed{K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

7) ① On a KMN rectangle en K

Donc $\mathcal{A}_{KMN} = \frac{1}{2} KM \times KN$

Or on a $\overrightarrow{MK} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $MK = NK = \frac{1}{2}$ u.l.

D'où $\mathcal{A}_{KMN} = \frac{1}{2} KM \times KN = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ u.a.

② Puis les points M, N et K ont la même cote, donc $(MNK) \parallel (DCG)$

Comme $(FG) \perp (DCG)$, on a également $(FG) \perp (MNK)$

De plus, comme $K \in (FG)$, on a $(FK) \perp (MNK)$

Ainsi, $(FK)$ est la hauteur du tétraèdre FNKM relative à la base KMN

③ On a donc $\mathcal{V}_{FNKM} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{KMN} \times FK$

Or on a $\overrightarrow{FK} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, donc $FK = \|\overrightarrow{FK}\| = \sqrt{\overrightarrow{FK}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ u.l

D'où $\mathcal{V}_{FNKM} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{KMN} \times FK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$ u.v.

4

Par ailleurs, $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1 u.l.

Donc $V_{ABCDEFGH} = 1^3 = 1$ u.v.

Ainsi, la fraction $\tau$ recherchée se calcule comme suit :

$$\tau = \frac{V_{FNKM}}{V_{ABCDEFGH}} = \frac{\frac{1}{48}}{1} = \boxed{\frac{1}{48}}$$

⚠ Sans unité

Pour information, nous avons découpé la réponse à la question 7 en 4 temps :

➔ 1) Calcul de l'aire de la base triangulaire $KMN$ du tétraèdre $FNKM$
➔ 2) Justification de la configuration du tétraèdre $FNKM$ préalable au calcul de volume
➔ 3) Calcul du volume du tétraèdre $FNKM$
➔ 4) Détermination de la fraction du cube $ABCDEFGH$ que représente le tétraèdre $FNKM$