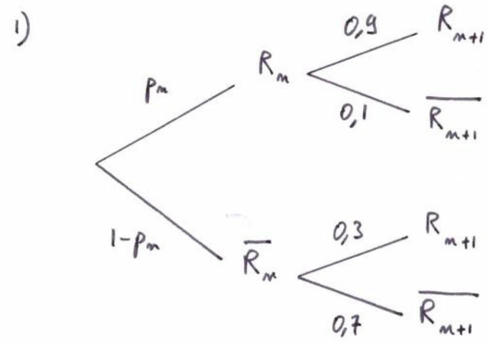
Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



2) $\{R_n ; \overline{R_n}\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$$
$$= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$$
$$= p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,3$$
$$= 0,9\,p_n + 0,3 - 0,3\,p_n$$
$$\boxed{= 0,6\,p_n + 0,3}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n - 0,75$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$
$$= 0,6\,p_n + 0,3 - 0,75$$
$$= 0,6\,p_n - 0,45$$
$$= 0,6\,p_n - 0,6 \times 0,75$$
$$= 0,6\,(p_n - 0,75)$$
$$= 0,6\,u_n$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0,6}$ et de premier terme $\boxed{u_0 =}\ p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = \boxed{-0,15}$

b) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = -0,15 \times 0,6^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n - 0,75 \iff p_n = u_n + 0,75 = \boxed{0,75 - 0,15 \times 0,6^n}$

c) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ car $0,6 \in]-1;1[$ puis par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} (0,75 - 0,15 \times 0,6^n) = 0,75 - 0,15 \times 0 = 0,75$$

Donc $\boxed{(p_n) \text{ converge et a pour limite } \ell = 0,75}$

d) $\boxed{\text{Après long terme, l'athlète franchira la haie dans 75\% des cas (3 fois sur 4).}}$

⟹ Partie B :

1) On répète $n = 10$ fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "l'athlète franchit la haie" est égale à $p = 0,75$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$. $\boxed{X \sim \mathcal{B}(10\,;0,75)}$

2) $P(X=10) = \binom{10}{10} \times p^{10} \times (1-p)^{10-10} = 1 \times 0,75^{10} \times 1 = 0,75^{10} \boxed{\simeq 0,056}$ (à 10^{-3} près)

3) $P(X \geqslant 9) = 1 - P(X \leqslant 8)$

$\simeq 1 - 0,756$ Fonction de répartition à la calculatrice

$\boxed{\simeq 0,244}$ (à 10^{-3} près)

Ex 2 :

1) $\mathcal{P}_1$ d'équation $5x+2y+4z=17$ admet $\vec{n_1}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ pour vecteur normal,

et $\mathcal{P}_2$ d'équation $10x+14y+3z=19$ admet $\vec{n_2}\begin{pmatrix}10\\14\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Puis $\mathcal{P}_1 \,//\, \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{n_2} = \lambda \vec{n_1}$$

$$\iff \begin{cases} 10 = 5\lambda \\ 14 = 2\lambda \\ 3 = 4\lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 7 \\ \lambda = \frac{3}{4} \end{cases}$$ incompatibles donc $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{n_2} \neq \lambda \vec{n_1}$

$\boxed{\text{D'où } \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ ne sont pas parallèles.}}$

2) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles (strictement ou confondus), donc ils sont $\boxed{\text{sécants selon une droite.}}$ Vérifions qu'il s'agit de $\mathcal{D}$ en injectant sa représentation paramétrique dans l'équation cartésienne de chaque plan.

$$\begin{aligned} 5x+2y+4z &= 5(1+2t)+2\times(-t)+4(3-2t) \\ &= 5+10t-2t+12-8t \\ &= 17 \quad \text{donc } \boxed{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x+14y+3z &= 10(1+2t)+14\times(-t)+3(3-2t) \\ &= 10+20t-14t+9-6t \\ &= 19 \quad \text{donc } \boxed{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_2} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}}$

3) a) $5x_A + 2y_A + 4z_A = 5\times 1 + 2\times(-1) + 4\times(-1) = 5 - 2 - 4 = -1 \neq 17$

Donc $\boxed{A \notin \mathcal{P}_1}$

b) $\begin{cases} x_A = 1+2t \\ y_A = -t \\ z_A = 3-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t = 1-1 \\ t = -(-1) \\ 2t = 3-(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{cases}$ incompatibles

Donc $\boxed{A \notin \mathcal{D}}$

4) a) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}1+2t\\-t\\3-2t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2t\\1-t\\4-2t\end{pmatrix}$

Puis $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = (2t)^2 + (1-t)^2 + (4-2t)^2$

$= 4t^2 + 1 - 2t + t^2 + 16 - 16t + 4t^2$

$\boxed{= 9t^2 - 18t + 17}$

b) Comme $AM = \sqrt{AM^2}$, AM est minimale en même temps que AM^2.

En effet, posons $g : t \longmapsto \sqrt{f(t)}$ définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)>0$ ($f(t) = AM^2$, et $A\notin\mathcal{D}$ donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $M\neq A$ i.e $f(t)\neq 0$) et dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $g'(t) = \left(\sqrt{f(t)}\right)' = \dfrac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}$ donc g' et f' ont le même signe, ce qui implique que g et f ont les mêmes variations (donc sont minimales en même temps).

Rem: On pouvait aussi démontrer que $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)>0$ avec $\Delta = (-18)^2 - 4\times 9\times 17 = -288 < 0$ et coeff dominant positif

Puis f est un polynôme du second degré convexe (coeff dominant positif) donc admet un minimum en $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-18)}{2\times 9} = \dfrac{18}{18} = 1$

Ainsi, AM est minimale pour $t = 1$

Puis le point M de $\mathcal{D}$ de paramètre $t=1$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1+2t = 1+2\times 1 = 3 \\ y = -t = -1 \\ z = 3-2t = 3-2\times 1 = 1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\text{AM est minimale lorsque M a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

5) Soit $H\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Par ailleurs, d'après la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$.

Puis dans le R.O.N.,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} &= 2\times 2 + 0\times(-1) + 2\times(-2) \\ &= 4+0-4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

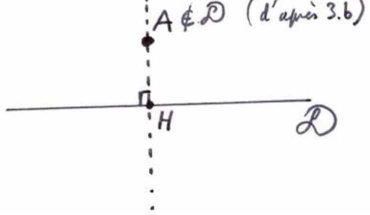
D'où $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$, impliquant que $\boxed{(AH) \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont } \underline{\text{orthogonales}}.}$

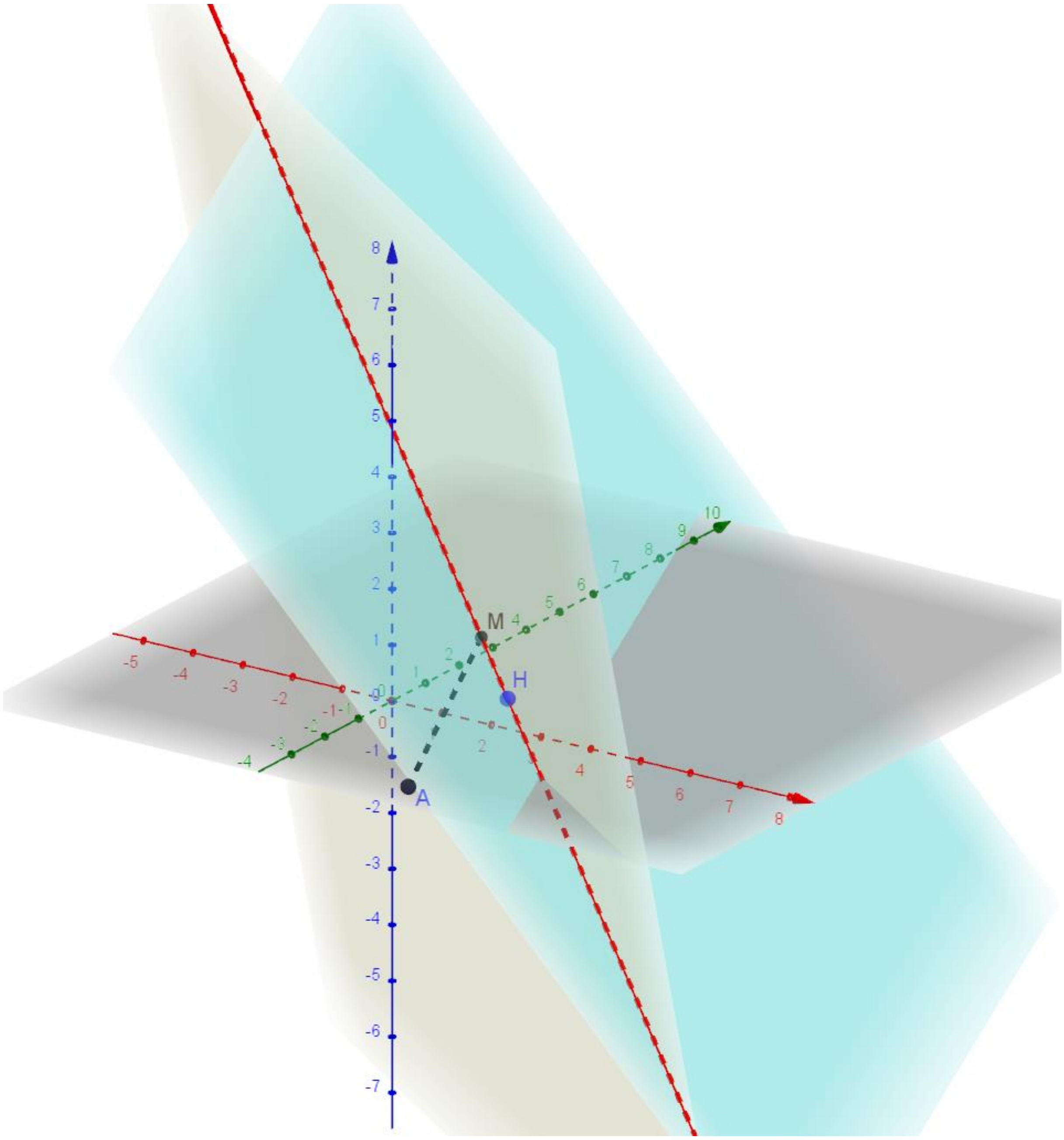
Or $\begin{cases} H \in \mathcal{D} \quad (\text{point de paramètre } t=1) \\ H \in (AH) \end{cases} \Rightarrow \boxed{H \in \mathcal{D} \cap (AH)}$

D'où $\boxed{(AH) \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont } \underline{\text{perpendiculaires}} \text{ en } H\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

<u>Rem:</u> Une autre méthode, moins conventionnelle que celle ci-dessus, étant plus rapide et bien adaptée à la physionomie de l'exercice :

D'après la question 4), H est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de A,
donc H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
D'où (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.




M
H
A

Ex 3 :

=> Partie A :

1) Il semble que :
$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est représentée par } C_2 \\ f' \text{ est représentée par } C_3 \\ f'' \text{ est représentée par } C_1 \end{array}}$$

Justifions notre choix avec un tableau de synthèse sur l'intervalle $[0;8]$ proposé :

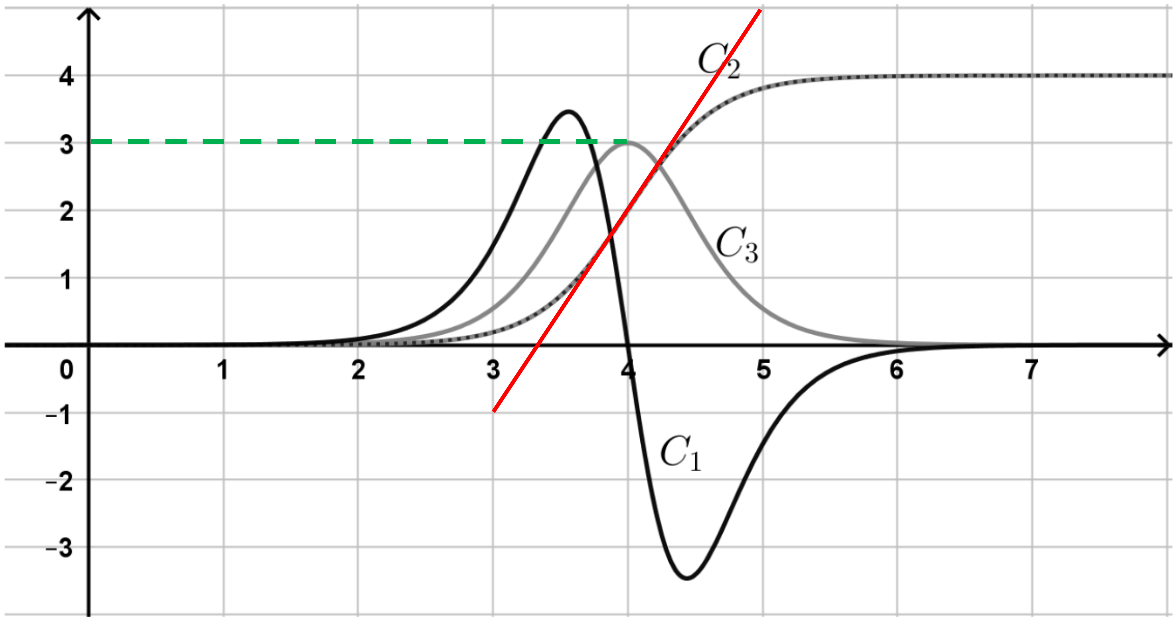
x	0	4	8
Variations de C_2	0	$\nearrow$	4
Signe de C_3		+	
Variations de C_3	0 $\nearrow$	3	$\searrow$ 0
Signe de C_1	+	0	−

2) Il semble que la tangente à C_2 au point d'abscisse 4 passe par les points $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$. Donc on peut calculer son coefficient directeur :
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{5-3} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

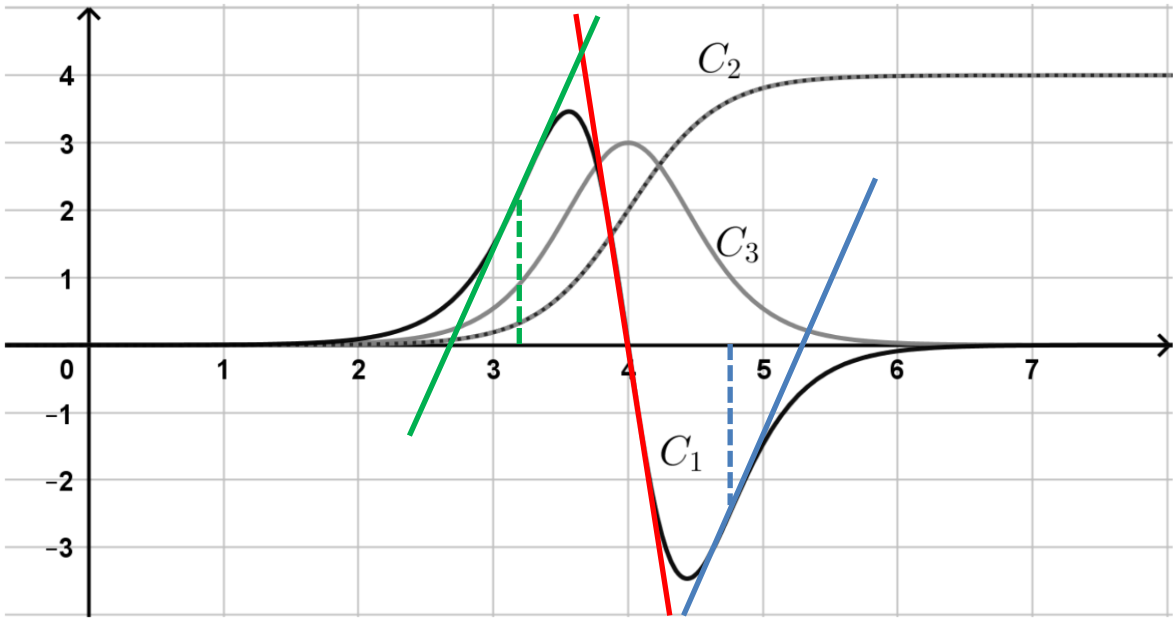
Rem : $m = f'(4)$ donc il s'agit de l'ordonnée du point de C_3 d'abscisse 4.

3) Il semble que C_1 ait 3 points d'inflexion d'abscisses :
$$\boxed{x_1 = 3{,}2 \quad ; \quad x_2 = 4 \quad \text{et} \quad x_3 = 4{,}75}$$

Voici en rouge le tracé de tangente pour la question 2 si on utilise la méthode calculatoire.
On remarque (en pointillés verts) que la lecture de $f'(4)$ est un peu plus précise.



Pour la question 3, on détermine les abscisses des points en lesquels la courbe traverse ses tangentes. La précision n'est pas très bonne (les correcteurs ont une marge de tolérance) et on ne peut malheureusement pas s'aider d'une autre courbe car on travaille déjà sur f''.
Attention également à bien rapporter votre mesure à l'unité de longueur du graphique (1,7 cm)



$\Rightarrow$ Partie B : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{4}{1+e^{-kx}} \qquad$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$

1) Comme $k > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} = 0^+$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} -kx = -\infty$

Puis par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-kx} = 1 + 0 = 1$

Enfin, par passage à l'inverse et par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{4}{1+0} = 4}$

De même, $k > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} -kx = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} = +\infty$

Ainsi, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-kx} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^{-kx}} = 0^+$

Enfin, par produit par une constante strictement positive, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0^+}$

2) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur est une composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$\forall k > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 4 \times \dfrac{-(0 + (-k) \times e^{-kx})}{(1 + e^{-kx})^2} \qquad$ car $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$= -4 \times \frac{-k e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$$

$$= \frac{4k e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$$

Puis $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad g'(0) = \dfrac{4k \times e^{-k \times 0}}{(1+e^{-k \times 0})^2} = \dfrac{4k \times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{4k}{4} = \boxed{k}$

3) On a $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = -4e^{kx}(e^{kx}-1)\dfrac{k^2}{(e^{kx}+1)^3}$

Etudions le signe de g''.

Or on a $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} 4e^{kx} > 0 \\ k^2 > 0 \\ (e^{kx}+1)^3 > 0 \end{cases}$

Donc le signe de g'' ne dépend que de $-(e^{kx}-1)$

Puis $-(e^{kx}-1) \geqslant 0 \iff 1 - e^{kx} \geqslant 0$

$\iff e^{kx} \leqslant 1$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff kx \leqslant \ln 1$

$\iff kx \leqslant 0$

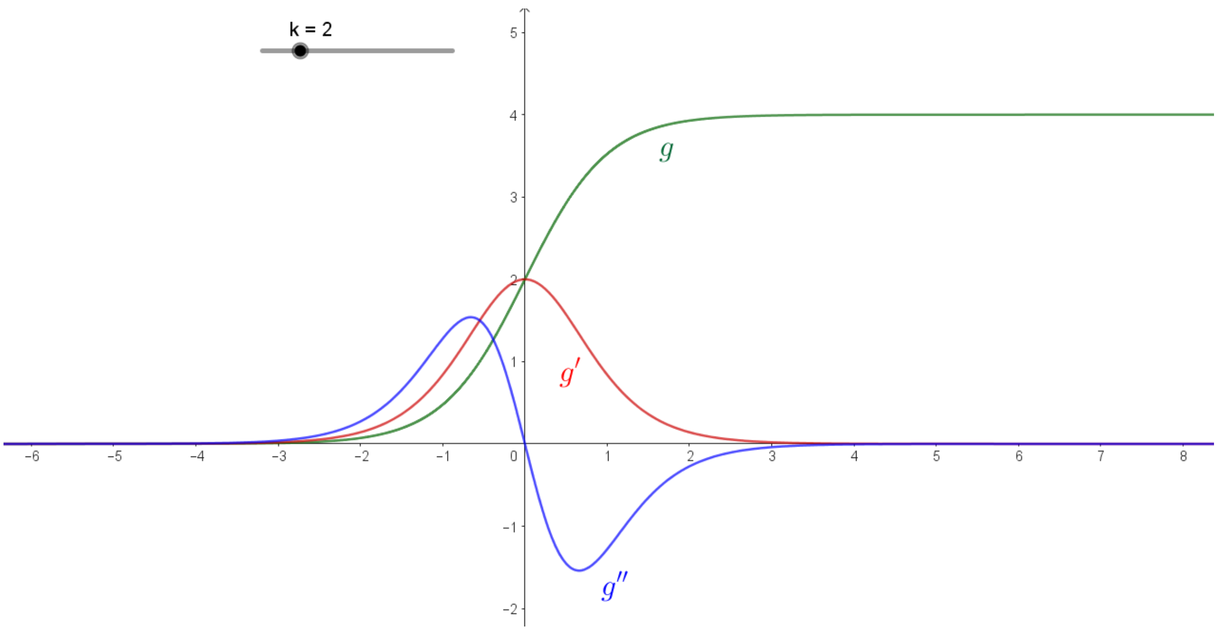
car $k > 0$

$\iff x \leqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
g		convexe	Inflexion	concave	

g'' s'annule et change de signe uniquement en 0

Donc $\boxed{g \text{ admet un unique point d'inflexion au point d'abscisse } 0.}$


k = 2
g
g'
g''

Ex 4 :

$\boxed{\text{1) Vraie}}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \overset{\text{car } n+1>0}{\Rightarrow} \dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} -1 < \dfrac{-1}{n+1} \\ \dfrac{1}{n+1} < 1 \end{cases}$ Donc par transitivité :

$-1 < \dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} < 1$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]-1;1[$

$\boxed{\text{2) Fausse}}$

Nous savons que toute suite convergente est bornée (théorème du cours), mais que la réciproque est fausse. Le contre-exemple classique est la $\boxed{\text{suite } ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui est bornée par } -1 \text{ et } 1 \text{ mais qui ne converge pas}}$ car elle admet deux valeurs d'adhérence (ce terme n'est pas à connaître en Terminale) -1 et 1.

$\boxed{\text{3) Fausse}}$

La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ est un contre-exemple.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = 2 - \dfrac{1}{n+1} - \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$

Donc (v_n) est (strictement) croissante.

Pourtant, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2 - 0 = 2$

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est croissante et majorée.}}$

$\boxed{4)\ \text{Fausse}}$

La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme strictement positive ($\Delta = 2^2 - 4\times1\times2 = -4 < 0$ et coeff dominant positif) par la fonction logarithme.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$

en tant que fonction rationnelle, puis $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+2) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4x+4-(4x^2+8x+4)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

Donc f'' est du signe $-2x(x+2)$ sur $\mathbb{R}$
(Polynôme du second degré à coeff. dominant négatif et ayant pour racines -2 et 0)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-2x(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave	Inflexion	convexe	Inflexion	concave	

f'' n'est pas de signe constant sur $[-3\,;1]$

Donc $\boxed{f \text{ change de convexité sur } [-3\,;1]}$

5) Vraie

La variable M prend la première valeur de la liste L, puis elle prend la valeur de tout élément qui lui est supérieur dans la liste.

En d'autres termes, la fonction "mystere(L)" renvoie le plus grand élément de la liste L.

Comme 7 est le plus grand élément de L, il s'agira bien de la valeur renvoyée par la fonction.

```python
def mystere(L):
    M=L[0]
    for i in range(len(L)):
        if L[i]>M:
            M=L[i]
    return M
```

```
>>> mystere([2,3,7,0,6,3,2,0,5])
7
```