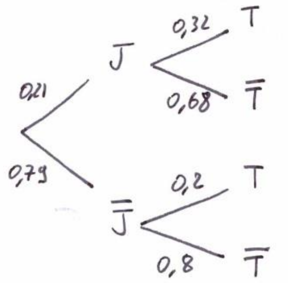
Ex 1 :

⇒ Partie A

1)




$P(J \cap T) = P(J) \times P_J(T)$

$= 0,21 \times 0,32$

$\boxed{= 0,0672}$

2) $\{J ; \overline{J}\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(J \cap T) + P(\overline{J} \cap T)$

$= 0,0672 + P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(T)$

$= 0,0672 + 0,79 \times 0,2$

$\boxed{= 0,2252}$

3) $P_T(J) = \dfrac{P(J \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0672}{0,2252} = \dfrac{168}{563}$ $\boxed{\simeq 0,30}$ (à $10^{-1}$ près)

⇒ Partie B

1) On répète $n = 120$ fois de façon identique et indépendante (tirage aléatoire avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la personne a moins de 35 ans" est égale à $p = 0,3$.
Donc $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,3$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(120 ; 0,3)}$

2) $P(X \geqslant 50) = 1 - P(X \leqslant 49)$

$\simeq 1 - 0,996$ Fonction de répartition dans la calculatrice

$\boxed{\simeq 0,004}$ (à $10^{-3}$ près)

Ex 2 :

1) ⓐ D'après la représentation paramétrique donnée, $\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$ dirige $d_2$.

ⓑ les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car la 3^e coordonnée de $\vec{v}$ est nulle mais pas celle de $\vec{u}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent respectivement $d_1$ et $d_2$, $\boxed{\text{ces droites ne sont pas parallèles.}}$

ⓒ $d_1$ a pour représentation paramétrique $d_1 : \begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Puis $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset \iff \exists (t;k) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t+2 = 2k+3 \\ -t+3 = k \\ t = 5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5 = 3k+3 \quad (L_1+L_2) \\ -t+3 = k \\ t = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3k = 2 \\ t = 3-k \\ t = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ t = 3-\frac{2}{3} = \frac{7}{3} \\ t = 5 \end{cases}$ > incompatibles

Ainsi, on a $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ i.e. $\boxed{d_1 \text{ et } d_2 \text{ ne sont pas sécantes.}}$

ⓓ D'après les deux questions précédentes, $\boxed{d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont non coplanaires.}}$

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{w} = 1\times(-1) + (-1)\times 2 + 1\times 3 = -1-2+3 = 0 \quad \text{donc } \boxed{\vec{w} \perp \vec{u}} \\ \vec{v}\cdot\vec{w} = 2\times(-1) + 1\times 2 + 0\times 3 = -2+2+0 = 0 \quad \text{donc } \boxed{\vec{w} \perp \vec{v}} \end{cases}$

b) $\mathcal{P} \cap d_2 : \begin{cases} 5x+4y-z-22=0 \\ x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow 5(2k-3)+4k-5-22=0$

$\Rightarrow 10k-15+4k-27=0$

$\Rightarrow 14k = 42$

$\Rightarrow k = \frac{42}{14} = 3$

Puis $\begin{cases} x = 2k-3 = 2\times 3-3 = 3 \\ y = k = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ D'où $\boxed{\mathcal{P} \cap d_2 = \left\{ M\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}}$

3) a) On a $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui dirige $\Delta$ et d'après 2.a), $\vec{w} \perp \vec{u}$

Comme $\vec{u}$ dirige $d_1$, les droites $\boxed{\Delta \text{ et } d_1 \text{ sont orthogonales.}}$

Etudions leur intersection :

$\Delta \cap d_1 \neq \emptyset \iff \exists (t, r) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t+2 = -r+3 \\ -t+3 = 2r+3 \\ t = 3r+5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5 = r+6 \quad (L_1+L_2) \\ t = -2r \\ t = 3r+5 \end{cases} \iff \begin{cases} r = -1 \\ t = -2r = -2\times(-1) = 2 \\ t = 3\times(-1)+5 = 2 \end{cases}$ > compatibles

Donc L est le pt de $d_1$ de paramètre $t=2$ et le pt de $\Delta$ de paramètre $r=-1$

D'où $\begin{cases} x_L = t_L+2 = 2+2 = 4 \\ y_L = -t_L+3 = -2+3 = 1 \\ z_L = t_L = 2 \end{cases}$ i.e. $\boxed{d_1 \cap \Delta = \left\{ L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$

Ainsi $\boxed{\Delta \text{ et } d_1 \text{ sont perpendiculaires en } L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

(b) D'après la question 2.a), on a $\vec{w} \perp \vec{v}$

Donc $\Delta$ et $d_2$ sont orthogonales car elles sont dirigées respectivement par $\vec{w}$ et $\vec{v}$.

Vérifions si $\Delta$ et $d_2$ sont sécantes (ou) voir la remarque en bas de page

$$\Delta \cap d_2 \neq \emptyset \iff \exists (k;r) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} 2k-3 = -r+3 \\ k = 2r+3 \\ 5 = 3r+5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5k-6 = 9 \quad (2L_1+L_2) \\ 2r = k-3 \\ 3r = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5k = 15 \\ r = \frac{1}{2}(k-3) \\ r = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 3 \\ r = \frac{1}{2}(3-3) = 0 \\ r = 0 \end{cases}$$

Le système est compatible donc $\Delta$ et $d_2$ sont sécantes, le point d'intersection étant le point de $\Delta$ de paramètre $r=0$

On trouve $\Delta \cap d_2 = \left\{ M\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} \right\}$

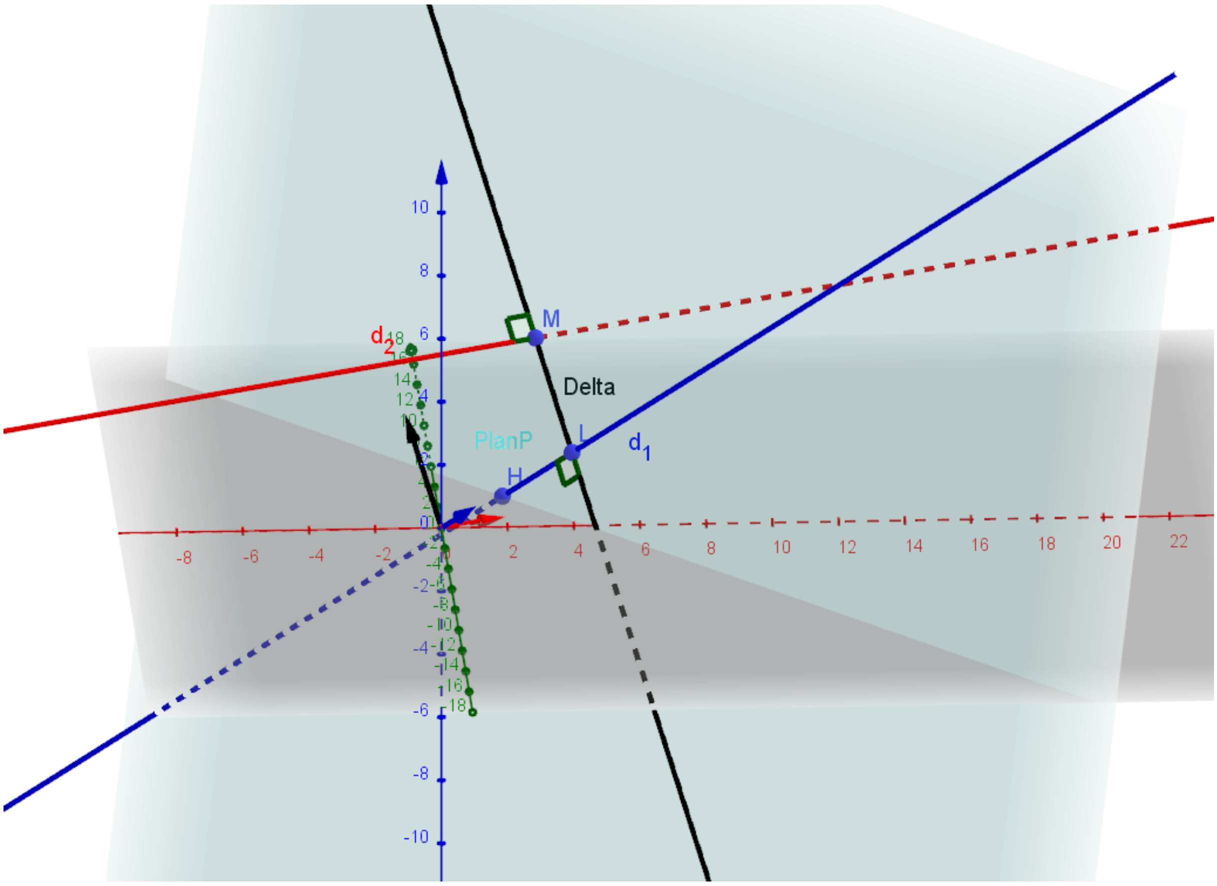
Ainsi $\Delta$ et $d_2$ sont perpendiculaires en $M\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}$

<u>Conclusion :</u> La droite $\Delta = (ML)$ est perpendiculaire à $d_1$ et $d_2$,

sa représentation paramétrique étant donnée dans l'énoncé :

$$\Delta : \begin{cases} x = -r+3 \\ y = 2r+3 \\ z = 3r+5 \end{cases},\ r \in \mathbb{R}$$

<u>Rem :</u> La résolution du système pour l'intersection était en fait inutile car l'énoncé précise que $M\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} \in d_2$ (question 2.b) et $M\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} \in \Delta$ (intro. question 3), donc $\Delta$ et $d_2$ sont sécantes en M.



d2
M
Delta
PlanP
I
d1
H

Ex 3 :

$\boxed{\text{1) Vraie}}$

La fonction $f : x \longmapsto e^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$ également dérivable sur $\mathbb{R}$ : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$

$\boxed{\text{2) Vraie}}$

$(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0 \iff 2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$

$\iff e^x = 3$ ou $e^x = -2$ pas de sol. dans $\mathbb{R}$

$\iff x = \ln 3$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\ln 3\}}$$

$\boxed{\text{3) Fausse}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x}$ : le dénominateur est une F.I. du type "$\infty - \infty$"

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \dfrac{\cancel{e^x}(e^x - e^{-x})}{\cancel{e^x}(1 - x e^{-x})}$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+ \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$$

(th croissances comparées)

$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0^+$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x e^{-x} = 1 - 0 = 1$

Finalement, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - x e^{-x}} = +\infty}$

$\boxed{\text{4) Vraie}}$

La fonction $F : x \longmapsto (2x+1)\,e^{3x} + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2e^{3x} + (2x+1) \times 3e^{3x} + 0 = (2 + 6x + 3)\,e^{3x} = (6x+5)\,e^{3x} = f(x)$

De plus, $F(0) = (2 \times 0 + 1)\,e^{3\times 0} + 4 = 1 \times 1 + 4 = 5$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(0) = 5}$

$\boxed{\text{5) Fausse}}$

La fonction "mystere (L)" renvoie la moyenne des valeurs contenues dans la liste L.

Le script renvoie donc ici : $\dfrac{1+9+9+5+0+3+6+12+0+5}{10} = \dfrac{50}{10} \boxed{= 5 \quad \neq 50}$

```
def mystere(L):
    S=0
    for i in range(len(L)):
        S=S+L[i]
    return S/len(L)
```

```
>>> mystere([1,9,9,5,0,3,6,12,0,5])
5.0
```

Ex4:

Soit $(u_n)$ : $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n - 0{,}3$

1) a) Démontrons par récurrence $P(n)$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$

Initialisation : Pour $n = 0$, $2 \times 0{,}9^0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1 = u_0$ $\Rightarrow P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$

et montrons que $u_{n+1} = 2 \times 0{,}9^{n+1} - 3$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 0{,}9\,u_n - 0{,}3 \\ &= 0{,}9 \times (2 \times 0{,}9^n - 3) - 0{,}3 \quad \text{HR} \\ &= 2 \times 0{,}9^{n+1} - 2{,}7 - 0{,}3 \\ &= 2 \times 0{,}9^{n+1} - 3 \quad \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3}$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < 0{,}9^n \leqslant 1 \Rightarrow 0 < 2 \times 0{,}9^n \leqslant 2$

$\Rightarrow -3 < 2 \times 0{,}9^n - 3 \leqslant 2 - 3$

$\Rightarrow \boxed{-3 < u_n \leqslant -1}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n - 0{,}3$

D'où $u_{n+1} - u_n = -0{,}1\,u_n - 0{,}3$

Or on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1 \Rightarrow 0{,}1 \leqslant -0{,}1\,u_n < 0{,}3$

$\Rightarrow 0{,}1 - 0{,}3 \leqslant -0{,}1\,u_n - 0{,}3 < 0{,}3 - 0{,}3$

$\Rightarrow -0{,}2 \leqslant \boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante}}$

Rem: On pouvait aussi utiliser la forme explicite de $(u_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2\times 0{,}9^{n+1} - 3 - (2\times 0{,}9^n - 3)$$
$$= 2\times 0{,}9 \times 0{,}9^n \cancel{-3} - 2\times 0{,}9^n \cancel{+3}$$
$$= 2\times(0{,}9-1)\times 0{,}9^n$$
$$= -0{,}2\times 0{,}9^n < 0 \quad \text{car } \forall n\in\mathbb{N},\ 0{,}9^n > 0$$

d) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > -3$ donc $(u_n)$ est minorée par $-3$

De plus, $(u_n)$ est (strictement) décroissante, donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geqslant -3$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ car $0{,}9 \in ]-1;1[$

Puis par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\times 0{,}9^n - 3 = 2\times 0 - 3 = \boxed{-3}$$

Rem: La démonstration de la convergence de $(u_n)$ par le théorème de la convergence monotone était inutile ici car nous disposons de la forme explicite de $(u_n)$. L'obtention d'une limite par calcul prouve de fait la convergence de $(u_n)$.

Nous l'avons néanmoins rédigée de façon introductive car l'énoncé semblait aller dans ce sens.

Si vous décidez de faire de même, il peut être appréciable de l'indiquer au correcteur.

2) $\forall x \in \left]-3\,;-1\right]$ , $g(x) = \ln(0{,}5x + 1{,}5) - x$

a) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -3^+} 0{,}5x + 1{,}5 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par composition, $\lim\limits_{x \to -3^+} \ln(0{,}5x + 1{,}5) = -\infty$

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) = -\infty}$

De plus, $\boxed{g(-1) =}\ \ln(0{,}5 \times (-1) + 1{,}5) - (-1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 \ \boxed{= 1}$

Enfin, $g$ est dérivable sur $\left]-3\,;-1\right]$ comme composée d'une fonction dérivable et strictement positive sur $\left]-3\,;-1\right]$ par la fonction logarithme, puis par somme avec une fonction dérivable sur $\left]-3\,;-1\right]$

$\forall x \in \left]-3\,;-1\right]$ , $g'(x) = \dfrac{0{,}5}{0{,}5x + 1{,}5} - 1 = \dfrac{0{,}5 - (0{,}5x + 1{,}5)}{0{,}5x + 1{,}5} = \dfrac{-0{,}5(x+2)}{0{,}5x + 1{,}5}$

On $\forall x \in \left]-3\,;-1\right]$, $0{,}5x + 1{,}5 > 0$ donc $g'$ est du signe de $-0{,}5(x+2)$

Soit $x \in \left]-3\,;-1\right]$, $-0{,}5(x+2) \geqslant 0 \iff x + 2 \leqslant 0 \iff x \leqslant -2$

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5(x+2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $0{,}5x+1{,}5$ | $0$ | | $+$ | | |
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $g(-2)$ | $\searrow$ | $1$ |

Rem : On aurait pu écrire : $g'(x) = \dfrac{-0{,}5(x+2)}{0{,}5x + 1{,}5} = \dfrac{-\cancel{0{,}5}(x+2)}{\cancel{0{,}5}(x+3)} = \dfrac{-x-2}{x+3}$

(b) Procédons par disjonction (exhaustive) de cas :

* Sur $]-3\,;-2[$ , $g$ est continue (car dérivable) et strictement croissante

On a $\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) = -\infty$

et $g(-2) = \ln(0{,}5 \times (-2) + 1{,}5) - (-2) = \ln(0{,}5) + 2 = 2 - \ln 2 \simeq 1{,}3 > 0$

Ainsi, $0 \in \left] \lim\limits_{x \to -3^+} g(x)\,;\, g(-2) \right[ = g(]-3\,;-2[)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]-3\,;-2[$

* Sur $[-2\,;-1]$ , $g$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante, minorée par $g(-1) = 1 > 0$ . Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[-2\,;-1]$

* Conclusion : Par disjonction de cas, on conclut que : $\boxed{\exists!\, \alpha \in ]-3\,;-1] ,\ g(\alpha) = 0}$

Par balayage avec la calculatrice, on obtient :

$g(-2{,}9) < 0$ et $g(-2{,}8) > 0$ donc $\alpha \in ]-2{,}9\,;-2{,}8[$

puis $g(-2{,}89) < 0$ et $g(-2{,}88) > 0$ donc $\alpha \in ]-2{,}89\,;-2{,}88[$

puis $g(-2{,}889) < 0$ et $g(-2{,}888) > 0$ donc $\boxed{\alpha \in ]-2{,}889\,;-2{,}888[}$

3)

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(0{,}5\,u_n + 1{,}5) = \ln(0{,}5(2 \times 0{,}9^n - 3) + 1{,}5)$

$= \ln(0{,}9^n \cancel{-1{,}5} \cancel{+1{,}5})$

$= \ln(0{,}9^n)$

$= n \times \ln 0{,}9$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } r = \ln 0{,}9}$ et de premier terme $v_0 = 0$

Rem : On pouvait aussi étudier la différence $v_{n+1} - v_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \ln(0{,}5u_{n+1} + 1{,}5) - \ln(0{,}5u_n + 1{,}5)$

$= \ln\left(0{,}5(2\times 0{,}9^{n+1} - 3) + 1{,}5\right) - \ln\left(0{,}5(2\times 0{,}9^n - 3) + 1{,}5\right)$

$= \ln\left(0{,}9^{n+1} \cancel{-1{,}5} \cancel{+1{,}5}\right) - \ln\left(0{,}9^n \cancel{-1{,}5} \cancel{+1{,}5}\right)$

$= \ln\left(0{,}9^{n+1}\right) - \ln\left(0{,}9^n\right)$

$= (n+1)\times\ln(0{,}9) - n\times\ln(0{,}9)$

$= \boxed{\ln 0{,}9}$

Puis $v_0 = \ln(0{,}5\times u_0 + 1{,}5) = \ln(0{,}5\times(-1) + 1{,}5) = \ln 1 = 0$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0{,}5u_n + 1{,}5)$

$\iff \ln(0{,}5u_n + 1{,}5) - u_n = 0$ car $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_n \in ]-3;-1] \\ \text{cf } 1.b) \end{cases}$

$\iff \boxed{g(u_n) = 0}$

(c) $(v_n)$ est arithmétique de raison $r = \ln 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 + n\times r = n\times\ln 0{,}9$

Puis démontrons par l'absurde qu'il n'existe pas de rang $k \in \mathbb{N}$ tq $u_k = \alpha$

Supposons que $\exists k \in \mathbb{N},\ u_k = \alpha$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in ]-3;-1]$, on peut composer par la fonction $g$ :

$u_k = \alpha \Rightarrow g(u_k) = g(\alpha)$

$\Rightarrow g(u_k) = 0$ d'après 2.b)

$\Rightarrow u_k = v_k$ d'après 3.b)

$\Rightarrow u_k = k\times\ln 0{,}9$ $(v_n)$ arithmétique

$\Rightarrow \alpha = k\times\ln 0{,}9$ car par hypothèse $u_k = \alpha$

$\Rightarrow k = \dfrac{\alpha}{\ln 0{,}9}$

Or d'après 2.b), $-2,889 < \alpha < -2,888$

$$\Rightarrow \frac{-2,888}{\ln 0,9} < \frac{\alpha}{\ln 0,9} < -\frac{2,889}{\ln 0,9}$$

car $\ln 0,9 < 0$
inversion des bornes

$$\Rightarrow -\frac{2,888}{\ln 0,9} < k < -\frac{2,889}{\ln 0,9}$$

Or $\dfrac{-2,888}{\ln 0,9} \simeq 27,41$ et $-\dfrac{2,889}{\ln 0,9} \simeq 27,42$

Ceci est absurde car $k \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \neq \alpha}$

d) Nous allons utiliser la contraposée de l'équivalence démontrée dans la question 3.b) :

$$\left(u_n = v_n \iff g(u_n) = 0\right) \iff \left(g(u_n) \neq 0 \iff u_n \neq v_n\right)$$

Or nous venons de démontrer dans la question 3.c) que :

$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \neq \alpha$

car $g$ ne s'annule qu'en $x = \alpha$ sur $]-3;-1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in ]-3;-1]$

$\Rightarrow g(u_k) \neq 0$

cf ci-dessus (contraposée)

$\Rightarrow u_k \neq v_k$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ v_k \neq u_k}$