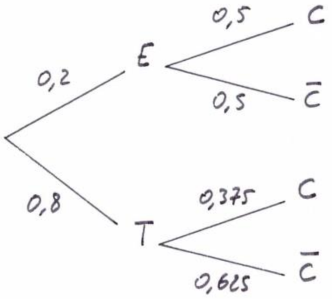
Ex 1 :

1) a)



$P(E\cap C) = P(E)\times P_E(C) = 0,2\times 0,5 = \boxed{0,1}$

b) $\{E\,;T\}$ forme un système complet d'événements
D'après la formule des probabilités totales,
$P(C) = P(E\cap C) + P(T\cap C) = 0,1 + P(T)\times P_T(C) = 0,1 + 0,8\times 0,375 = 0,1 + 0,3 = \boxed{0,4}$

c) $P_C(E) = \dfrac{P(E\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,1}{0,4} = \dfrac{1}{4} = \boxed{0,25}$

2) a) On répète $n = 17$ fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique" est égale à $p = P(E) = 0,2$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 17$ et $p = 0,2$. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(17\,;\,0,2)}$

b) $P(X\geqslant 3) = 1 - P(X\leqslant 2)$
$\simeq 1 - 0,31$ } on utilise la fonction de répartition de la calculatrice.
$\boxed{\simeq 0,69}$ (à 10^{-2} près)

Rem : Comme l'énoncé demande de "calculer", on pourra éventuellement détailler : $P(X\leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$
$= \binom{17}{0}\times 0,2^0\times 0,8^{17} + \binom{17}{1}\times 0,2^1\times 0,8^{16} + \binom{17}{2}\times 0,2^2\times 0,8^{15}$

Ex 2 :

=> Partie A : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right) . e^{-x} + x$

1) * En $-\infty$:

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + \frac{1}{2} = -\infty \end{cases}$ => Par produit, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x+\frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty$

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

* En $+\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x . e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} + x = \frac{x}{e^{x}} + \frac{1}{2} e^{-x} + x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ d'après le théorème des croissances comparées,

donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0^{+}$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^{+}$

D'où par opérations sur les limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) ⓐ On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= 1 \times e^{-x} + \left(x+\frac{1}{2}\right) \times \left(-e^{-x}\right) + 1 \\ &= e^{-x}\left(1 - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + 1 \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{2} - x\right) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) &= -e^{-x}\left(\frac{1}{2} - x\right) + e^{-x} \times (-1) + 0 \\ &= -e^{-x}\left(\frac{1}{2} - x + 1\right) \\ &= -e^{-x}\left(\frac{3}{2} - x\right) \\ &= \boxed{\left(x - \frac{3}{2}\right) . e^{-x}} \end{aligned}$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ donc f'' est du signe de $x - \frac{3}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x - \frac{3}{2} \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$1-e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) + 1 = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$

De plus, f'' s'annule et change de signe ($-$ vers $+$) en $x = \frac{3}{2}$,

donc $\boxed{f' \text{ admet un minimum en } x = \frac{3}{2} \text{ qui vaut } f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-3/2}}$

(c) f' admet pour minimum $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \simeq 0{,}78 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0}$ (par transitivité)

(d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ donc f est <u>strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}$

De plus, f est <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$

D'après la question 1), on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $0 \in f(\mathbb{R})$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation

$\boxed{f(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R},}$ que nous noterons α.

(e) Par balayage : $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$ donc $\alpha \in \left]-1\,;0\right[$

puis $f(-0{,}3) < 0$ et $f(-0{,}2) > 0$ donc $\alpha \in \left]-0{,}3\,;-0{,}2\right[$

puis $f(-0{,}29) < 0$ et $f(-0{,}28) > 0$ donc $\alpha \in \left]-0{,}29\,;-0{,}28\right[$

puis $f(-0{,}286) < 0$ et $f(-0{,}285) > 0$ donc $\alpha \in \left]-0{,}286\,;-0{,}285\right[$

puis $f(-0{,}2855) < 0$ et $f(-0{,}2854) > 0$ donc $\alpha \in \left]-0{,}2855\,;-0{,}2854\right[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq -0{,}285}$ (à 10^{-3} près)

=> Partie B :

1) En faisant coulisser la règle le long de la courbe, on constate que la tangente semble traverser la courbe au point d'abscisse $\boxed{1,5}$.
Il s'agirait de $\boxed{\text{l'unique point d'inflexion}}$ car la fonction h semble concave sur $]-\infty\,;1,5]$ puis convexe sur $[1,5\,;+\infty[$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + x e^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right).e^{-x} = f''(x)$

On retrouve la fonction f'' étudiée à la question 2) de la partie A.

On a donc :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h''(x) = f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	
			Inflexion		

⚠ Ne surtout pas se contenter de résoudre $h''(x) = 0$.
Il s'agit en effet d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

Conclusion : $\boxed{\text{La conjecture précédente est donc validée.}}$

3) Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}-2\\-2,5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\3,5\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est également un vecteur directeur de (AB)

Puis $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \iff \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y+2,5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 3(x+2) - 2(y+2,5) = 0$$

$$\iff 3x + 6 - 2y - 5 = 0$$

$$\iff \boxed{3x - 2y + 1 = 0}$$

ou sous forme réduite : $\boxed{y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$

4) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $h : x \longmapsto (ax+b) \cdot e^{-x} + x$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = a \cdot e^{-x} + (ax+b) \times (-e^{-x}) + 1$

$= e^{-x}(a - b - a.x) + 1$

On a $h'(0) = e^{-0} \cdot (a - b - a \times 0) + 1 = 1 \times (a-b) + 1 = a - b + 1$

et $h(0) = (a \times 0 + b) \times e^{-0} + 0 = b \times 1 = b$

D'où (AB) : $y = h'(0) \times (x - 0) + h(0)$

$\Leftrightarrow y = (a - b + 1) \times x + b$

Puis par identification avec l'équation réduite de (AB) trouvée à la question précédente : $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, on a le système :

$$\begin{cases} a - b + 1 = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} - 1 + b \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $\boxed{(a;b) = \left(1 ; \frac{1}{2}\right)}$

et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x} + x} = f(x)$

Rem : Même si on a trouvé que $\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = f''(x)$, rien ne permettait a priori de dire que $h(x) = f(x)$ avant d'avoir traité cette question 4.

Ex3 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$

1) f est un polynôme du second degré convexe car son coefficient dominant est strictement positif. Son sommet $(\alpha ; \beta)$ correspond donc à son minimum sur $\mathbb{R}$, et on a : $\alpha = \frac{-(-2)}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Puis $\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{4}{3} + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{-4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 . \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

D'où par opérations sur les limites, on a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) f est strictement croissante sur $\left[\frac{4}{3} ; +\infty\right[$, donc sur $\left[\frac{4}{3} ; 2\right] \subset \left[\frac{4}{3} ; +\infty\right[$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} \geqslant \frac{4}{3}$

$f(2) = \frac{3}{4} \times 2^2 - 2 \times 2 + 3 = \frac{3}{\cancel{4}} \times \cancel{4} - 4 + 3 = 3 - 1 = 2 \leqslant 2$

Ainsi, $f\left(\left[\frac{4}{3} ; 2\right]\right) = \left[\frac{5}{3} ; 2\right] \subset \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$

Donc $\boxed{\forall x \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right], \ f(x) \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]}$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x$

$$= \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2\right)$$

$$= \frac{3}{4}(x-2)^2 \geqslant 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x \geqslant 0 \iff \boxed{f(x) \geqslant x}$

4) Cas $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

Initialisation : Pour $n = 0$

* D'après la question 3), $u_0 \leqslant f(u_0) \iff u_0 \leqslant u_1$
* D'après la question 2), $u_0 \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right] \Rightarrow f(u_0) \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right] \Rightarrow u_1 \leqslant 2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

et montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$

D'après (HR), $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

$\Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$ car f est croissante sur $\left[\frac{4}{3} ; 2\right]$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$ car $f(2) = 2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow (u_n)$ est croissante

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2 \Rightarrow (u_n)$ est majorée

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 2$. On sait par ailleurs que $\ell \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$

(c) (u_n) converge et f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, alors (u_n) converge vers un point fixe, i.e. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Soit $\ell \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, $f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0$

$\iff \frac{3}{4}(x-2)^2 = 0$ } d'après la question 3)

$\iff (x-2)^2 = 0$

$\iff x = 2$ (solution double)

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$

5) Cas $u_0 = 3$

```
def seuil():
    u = 3
    n = 0
    while u < 100:
        u = 0.75 * u * u - 2 * u + 3
        n = n + 1
    return n
```

⚠ La boucle doit tourner tant que $u_n \geqslant 100$ n'est pas vérifié. On écrit donc la négation de $u_n \geqslant 100$ dans la boucle, c'est-à-dire $u_n < 100$

```
def seuil():
    u=3
    n=0
    while u<100:
        u=0.75*u*u-2*u+3
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil()
4
```

6) Cas $u_0 > 2$

Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel l

D'après la question 3), $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq f(x)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq f(u_n) \iff u_n \leq u_{n+1}$

$\iff (u_n)$ est croissante

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$, et comme $u_0 > 2$, par transitivité, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$

Par ailleurs, nous avons vu dans la question 4) que (u_n) ne possède qu'un unique point fixe qui est 2.

Ainsi, si (u_n) converge, alors on a forcément $l = 2$

ceci est absurde car $u_0 > 2$ et (u_n) est croissante.

Donc nous venons de démontrer par l'absurde que la suite $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas convergente.}}$

Ex 4:

$\boxed{1)\ D}$

Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\-2\\11\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$

Parmi les quatre vecteurs $\overrightarrow{u_k}$ proposés, on cherche celui qui est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{AB} = -6\times(-12) + 3\times 6 + 0\times 0 = 72+18 = 90 \neq 0$ donc $\overrightarrow{u_1}$ ne convient pas

$\begin{cases} \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 1\times(-12) + 2\times 6 + 6\times 0 = -12+12+0 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 1\times 4 + 2\times(-2) + 6\times 5 = 4-4+30 = 30 \neq 0 & \text{donc } \overrightarrow{u_2} \text{ ne convient pas} \end{cases}$

$\begin{cases} \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{AB} = 1\times(-12) + 2\times 6 + 0{,}2\times 0 = -12+12+0 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{u_3} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{BC} = 1\times 4 + 2\times(-2) + 0{,}2\times 5 = 4-4+1 = 1 \neq 0 & \text{donc } \overrightarrow{u_3} \text{ ne convient pas.} \end{cases}$

$\begin{cases} \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AB} = 1\times(-12) + 2\times 6 + 0\times 0 = -12+12+0 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{u_4} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{BC} = 1\times 4 + 2\times(-2) + 0\times 5 = 4-4+0 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{u_4} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$

$\boxed{2)\ C}$

Parmi les quatre propositions, seule la C. propose un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\6\\0\end{pmatrix}$.

Les autres vecteurs directeurs de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires à $\overrightarrow{AB}$

$\boxed{3)\ C}$

D'après la représentation paramétrique donnée, (d') est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\4\\5\end{pmatrix}$.

Tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de (d').

C'est le cas de $\vec{v_3}\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$ qui est l'opposé de $\vec{v}$.

$\boxed{4)\ A}$

Testons pour $M_1\begin{pmatrix}50\\-28\\-29\end{pmatrix}$ en recherchant son éventuel paramètre.

$$\begin{cases}50=-6-8t\\-28=4t\\-29=6+5t\end{cases} \iff \begin{cases}8t=-56\\t=-\dfrac{28}{4}\\5t=-35\end{cases} \iff \begin{cases}t=\dfrac{-56}{8}=-7\\t=-7\\t=\dfrac{-35}{5}=-7\end{cases} \longleftarrow \text{compatibles}$$

Donc $M_1 \in (d')$. Il s'agit de son point de paramètre $t=-7$

$\boxed{5)\ A}$

$$x=1 \iff 1\times x+0\times y+0\times z-1=0$$

Donc $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan d'équation $x=1$