Ex 1 :

1) $\begin{cases} F \text{ et } C \text{ sont deux points distincts du plan } (BCF) \\ K \notin (BCF) \end{cases}$

Ainsi, les points C, F et K ne sont pas alignés et $\boxed{\text{définissent donc le plan (CFK).}}$

OU

Dans le R.O.N., on a $K\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KF}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\0\end{pmatrix}$

Ces vecteurs n'étant pas colinéaires (présence des 0 dans les composantes des vecteurs à des endroits différents), les points K, C et F ne sont pas alignés et $\boxed{\text{définissent donc le plan (CFK).}}$

2) a) $\boxed{GF = GC = 1}$ et $\boxed{KG = \frac{1}{2}}$

b) Le triangle FGC est rectangle en G car BCGF est un carré.

D'où $\mathcal{A}_{FGC} = \frac{1}{2} GC \times GF = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \boxed{\frac{1}{2} \text{ u.a.}}$

c) $(KG) \perp (FGC)$ car $\begin{cases} (HG) \perp (FGC) \text{ dans le cube ABCDEFGH} \\ K \in (HG) \end{cases}$

D'où $\mathcal{V}_{FGCK} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{FGC} \times KG = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{12} \text{ u.v.}}$

3) a) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KF}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{KC} = 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 0 + 1 - 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{KC} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{KF} = 1 \times (-1) + 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{KF} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{KC}$ et $\vec{KF}$ non colinéaires et directeurs du plan (CFK), donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ est normal au plan } (CFK)}$.

ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ normal à (CFK) donc ce plan a une équation cartésienne de la forme : $1\times x + 2\times y + 1\times z + d = 0$ i.e. $x + 2y + z + d = 0$

Or $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in (CFK) \iff x_C + 2y_C + z_C + d = 0 \iff 1 + 2\times 1 + 0 + d = 0 \iff d = -3$

D'où (CFK) : $\boxed{x + 2y + z - 3 = 0}$

4) $\Delta \perp (CFK)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ normal à (CFK) est directeur de Δ

Par ailleurs, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \Delta$

Donc $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Delta \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \vec{GM} = t.\vec{n}$

$$\iff \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = 2t \\ z - 1 = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

5) $L \in \Delta \cap (CFK) \iff \begin{cases} L \in (CFK) \\ L \in \Delta \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x_L + 2y_L + z_L - 3 = 0 \\ x_L = 1 + t_L \\ y_L = 1 + 2t_L \\ z_L = 1 + t_L \end{cases}$$

Ceci implique que : $(1+t_L) + 2(1+2t_L) + (1+t_L) - 3 = 0$

$\iff 1+t_L + 2 + 4t_L + 1 + t_L - 3 = 0$

$\iff 6t_L + 1 = 0$

$\iff t_L = -\frac{1}{6}$

D'où $\begin{cases} x_L = 1+t_L = 1+\frac{-1}{6} = \frac{5}{6} \\ y_L = 1+2t_L = 1+2\times\frac{-1}{6} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z_L = 1+t_L = x_L = \frac{5}{6} \end{cases}$ i.e. $\boxed{\Delta \cap (CFK) = \left\{ L\begin{pmatrix} 5/6 \\ 2/3 \\ 5/6 \end{pmatrix} \right\}}$

(b) Dans le R.O.N., on a $L\begin{pmatrix} 5/6 \\ 2/3 \\ 5/6 \end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{LG}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$

Puis $LG = \|\vec{LG}\| = \sqrt{\vec{LG}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}}$

$\iff LG = \sqrt{\frac{2}{36} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{3}{18}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}$ u.l.

(6) (LG) est la hauteur du tétraèdre FGCK issue de G, relative à la base CFK

car $\begin{cases} (LG) = \Delta \\ \Delta \cap (CFK) = \{L\} \\ \Delta \perp (CFK) \end{cases}$ D'où $V_{FGCK} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{CFK} \times LG$

$\iff \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{CFK} \times \frac{\sqrt{6}}{6}$ cf (2.c) et (5.b)

$\iff \mathcal{A}_{CFK} = \frac{\cancel{3}^{1} \times \cancel{6}^{3}}{\cancel{12}_{\cancel{4}_{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\iff \mathcal{A}_{CFK} = \frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{6}}{2 \times \cancel{6}_{2}}$

$\iff \boxed{\mathcal{A}_{CFK} = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ u.a.}}$

Ex2 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad f(x) = x \cdot e^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

D'après le théorème des croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Donc par passage à l'inverse, $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+}$

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses).

2) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) = \boxed{(1-x)\,e^{-x}}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0 \iff (1-x)\,e^{-x} \geqslant 0$

$\iff 1 - x \geqslant 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \ e^{-x} > 0$

$\iff x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$f(1) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$f(0) = 0 \times e^{-0} = 0 \times 1 = 0$

4) On a $e^{-1} \simeq 0{,}3679 > \dfrac{367}{1000}$

Donc $\dfrac{367}{1000} \in \,]0 \, ; e^{-1}[$

Le tableau de variations permet de voir rapidement que l'équation $f(x) = \dfrac{367}{1000}$

possède deux solutions α_1 et α_2 respectivement sur $[0;1[$ et sur $[1;+\infty[$.

Démontrons ceci par disjonction de cas :

* Sur $[0;1[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

  On a $f([0;1[) = [f(0); f(1)[= [0; e^{-1}[$

  et $\frac{367}{1000} \in [0; e^{-1}[$

  Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

  $\exists! \, \alpha_1 \in [0;1[, \quad f(\alpha_1) = \frac{367}{1000}$

* Sur $[1;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

  On a $f([1;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) ; f(1)] =]0; e^{-1}]$

  et $\frac{367}{1000} \in]0; e^{-1}]$

  Donc d'après le théorème de la bijection, $\exists! \, \alpha_2 \in [1;+\infty[, \ f(\alpha_2) = \frac{367}{1000}$

* Conclusion: $\boxed{\text{l'équation } f(x) = \frac{367}{1000} \text{ possède 2 solutions distinctes sur } \mathbb{R}_+}$

5) On admet que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f''(x) = e^{-x}(x-2)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ e^{-x} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $x-2$ sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi, $f''(x) \geqslant 0 \iff x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	inflexion	convexe	

6)

ⓐ Soit $a \in \mathbb{R}_+$, T_a a pour éq. réduite : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

D'où T_a : $y = (1-a)\,e^{-a} \times (x-a) + a.e^{-a}$

$\Leftrightarrow y = (1-a)\,e^{-a}\,x - a(1-a)\,e^{-a} + a.e^{-a}$

$\Leftrightarrow y = (1-a)\,e^{-a}\,x + a\,e^{-a}\left(1-(1-a)\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{y = (1-a)\,e^{-a}\,x + a^2\,e^{-a}}$

ⓑ $g(a)$ est l'ordonnée de H_a, point d'intersection de T_a et $(O,\vec{J})$

Donc $g(a)$ est l'ordonnée à l'origine de T_a.

En utilisant la question précédente, on a : $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+,\ g(a) = a^2 e^{-a}}$

ⓒ D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x^2 e^{-x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = 2x\,e^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = (2-x)\,x\,e^{-x} = x \times f''(x)$

Comme $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}_+$, à l'exception du fait que g' s'annule en 0 (et pas f'')

	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
x	0		$+$		
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

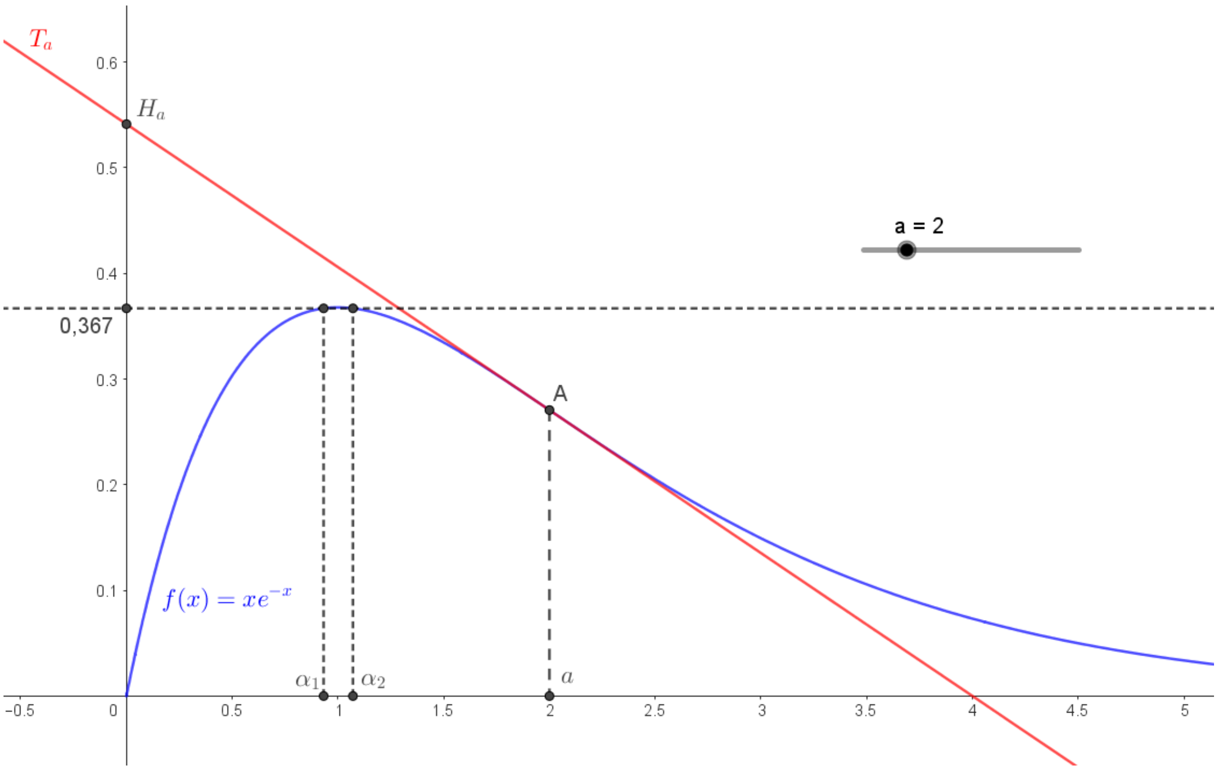
Ainsi, $g(a)$ est maximale pour $a = 2$

D'après la question 5), ceci signifie que $\boxed{\text{A est le point d'inflexion de } \mathcal{C}_f}$

Rem 1 : Le minimum de $g(a)$ est atteint pour $a = 0$

Rem 2 : La fonction $x \mapsto xe^{-x}$ étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est une restriction de $x \mapsto xe^{-x}$ à $\mathbb{R}_+$

Graphique récapitulatif de l'exercice :



Ex 3 :

(u_n) : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$

On admet que (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$

1) $u_1 = \dfrac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \dfrac{-0-4}{0+3} = \boxed{\dfrac{-4}{3}}$

$$u_2 = \dfrac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \dfrac{-\frac{-4}{3} - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = \boxed{\dfrac{-8}{5}} = -1,6$$

2)
```
def terme(n):
    u = [0]
    for i in range(n):
        u = [(-u - 4) / (u + 3)]
    return(u)
```

```
def terme(n):
    u=0
    for i in range(n):
        u=(-u-4)/(u+3)
    return(u)
```

```
>>> terme(0)
0
>>> terme(1)
-1.3333333333333333
>>> terme(2)
-1.6
```

3) $\forall x \in I =]-3 ; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$

f est dérivable sur son ensemble de définition I en tant que fonction rationnelle

$$\forall x \in I, \ f'(x) = \dfrac{-1 \times (x+3) - 1 \times (-x-4)}{(x+3)^2} = \dfrac{-\cancel{x} - 3 + \cancel{x} + 4}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I =]-3 ; +\infty[}$

4) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \ -2 < u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = -\frac{4}{3}$

D'où $-2 < u_1 \leqslant u_0 \quad \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

On a (HR) : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$

$\Rightarrow f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ car f est strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$

$\Rightarrow \frac{-(-2)-4}{-2+3} < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$

$\Rightarrow -2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ -2 < u_{n+1} \leqslant u_n}$

5) On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \leqslant u_n & \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ -2 \leqslant u_n & \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée par } -2 \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geqslant -2$

6) Soit (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

a) $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{0+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2}$

$$= \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$\iff v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2(u_n+3)}{u_n+3}} - \frac{1}{u_n+2}$$

$$= \frac{u_n+3}{-u_n-4+2u_n+6} - \frac{1}{u_n+2}$$

$$= \frac{u_n+3}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+2}$$

$$= \frac{u_n+2}{u_n+2}$$

$$= 1$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 1}$

ⓒ D'après les questions ⓐ et ⓑ, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = r \times n + v_0 = 1 \times n + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n + 2} \iff u_n + 2 = \frac{1}{v_n}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$

$$\iff u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \boxed{\frac{1}{n+0,5} - 2}$$

ⓓ On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 0,5 = +\infty$

Puis par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+0,5} = 0^+$

Enfin, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2}$

Ex 4 :

$\boxed{1)\ B}$

$$P_A(F) = \frac{P(A\cap F)}{P(A)} = \frac{\text{Card}(A\cap F)}{\text{Card}(A)} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{2)\ C}$

$$P(A\cup F) = \frac{\text{Card}(A\cup F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A) + \text{Card}(F) - \text{Card}(A\cap F)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{75 + 105 - 25}{200}$$

$$= \frac{155}{200} = \frac{31}{40}$$

$\boxed{3)\ D}$

Notons B : "le bus est en panne" et T : "le train est en panne"

D'où $p_1 = P(B\cup T) = P(B) + P(T) - P(B\cap T)$
$= b + t - P(B)\times P(T)$ car B et T sont indépendants
$= b + t - b\times t$

$\boxed{4)\ B}$

$$p_2 = P(\overline{B}\cup\overline{T}) \underset{\text{Loi "De Morgan"}}{=} P(\overline{B\cap T}) = 1 - P(B\cap T) \underset{\text{Indépendance}}{=} 1 - P(B)\times P(T) = 1 - b\times t$$

$\boxed{5)\ D}$

On note X la var. al. qui compte le nb de "FACE", d'où $X \sim \mathcal{B}(n\,;x)$

$$P(X\geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0}\times x^0\times(1-x)^{n-0} = 1 - 1\times 1\times(1-x)^n = 1-(1-x)^n$$