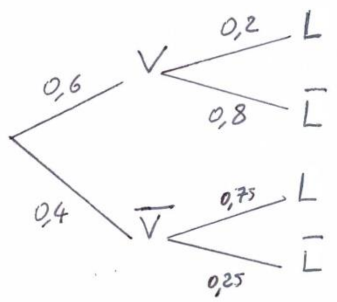
Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



⚠ Ne pas oublier de compléter les deux dernières branches après la question 4)

2) $P(V\cap\overline{L}) = P(V)\times P_V(\overline{L}) = 0{,}6\times 0{,}8 = \boxed{0{,}48}$

3) $\{V;\overline{V}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$P(L) = P(V\cap L) + P(\overline{V}\cap L)$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow P(\overline{V}\cap L) = P(L) - P(V\cap L) &= 0{,}42 - P(V)\times P_V(L)\\ &= 0{,}42 - 0{,}6\times 0{,}2\\ &= 0{,}42 - 0{,}12\\ &= \boxed{0{,}3}\end{aligned}$$

4) On a : $P(\overline{V}\cap L) = P(\overline{V})\times P_{\overline{V}}(L)$

$$\Leftrightarrow P_{\overline{V}}(L) = \frac{P(\overline{V}\cap L)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = \boxed{0{,}75}$$

5) $P_L(V) = \dfrac{P(V\cap L)}{P(L)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}42} = \dfrac{12}{42} \boxed{= \dfrac{2}{7} \simeq 0{,}29}$ (à 10^{-2} près)

⇒ Partie B :

1) On a $P_{\overline{L}}(A) = 0,12$ et $P_L(A) = 0,005$

D'où $P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0,42 \times 0,005 = \boxed{0,0021}$

et $P(\overline{L} \cap A) = P(\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(A) = (1 - P(L)) \times 0,12 = (1 - 0,42) \times 0,12 = 0,58 \times 0,12 = \boxed{0,0696}$

2) Comme $\{L ; \overline{L}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$P(A) = P(L \cap A) + P(\overline{L} \cap A) = 0,0021 + 0,0696 = 0,0717$

Introduisons Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'avaries.

On répète $n = 1000$ fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " le bateau subit une avarie" est égale à $p = P(A) = 0,0717$

D'où $Y \sim \mathcal{B}(1000 ; 0,0717)$

Puis $E(Y) = n \times p = 1000 \times 0,0717 = 71,7$

Donc on peut s'attendre à $\boxed{\text{environ 72 avaries.}}$

⇒ Partie C :

1) $\boxed{n = 40 \text{ et } p = P(L) = 0,42}$ D'où $X \sim \mathcal{B}(40 ; 0,42)$

2) $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14)$ Fonction de répartition de la calculatrice

$\simeq 1 - 0,232$

$\boxed{\simeq 0,768}$ (à 10^{-3} près)

Ex 2 :

1) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$ et $u_0 = 3$

D'où $u_1 = 5u_0 - 4\times 0 - 3 = 5\times 3 - 0 - 3 = 15 - 3 = \boxed{12}$

b) $u_2 = 5\times u_1 - 4\times 1 - 3 = 5\times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$

c) Il semble que (u_n) soit $\boxed{\text{strictement croissante}}$ et que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

2) a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n+1$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3 \geqslant 0+1 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant n+1$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant n+2$

On a (HR) : $u_n \geqslant n+1 \Rightarrow 5u_n \geqslant 5(n+1)$

$\Rightarrow 5u_n \geqslant 5n+5$

$\Rightarrow 5u_n - 4u_n - 3 \geqslant 5n+5-4n-3$

$\Rightarrow u_{n+1} \geqslant n+2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n+1}$

b) On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n+1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \end{cases}$ Donc d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

Remarque : Les captures d'écran de la calculatrice permettant d'émettre les conjonctures demandées à la question 1.c) figurent en fin d'exercice.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n - 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$

$= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1$

$= 5u_n - 5n - 5$

$= 5(u_n - n - 1)$

$= 5 v_n$

D'où $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 5}$

et $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = \boxed{2}$

b) D'après a), on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{2 \times 5^n}$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n - 1$

$\iff u_n = v_n + n + 1$

$\iff \boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 - (2 \times 5^n + n + 1)$

$= 2 \times 5^n \times 5 + \cancel{n} + 2 - 2 \times 5^n \times 1 - \cancel{n} - 1$

$= 2 \times 5^n \times (5 - 1) + 1$

$= 8 \times 5^n + 1 > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^n \geq 1 > 0$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$

OU On pouvait remarquer que (u_n) est la somme de la suite géométrique (2×5^n) strictement croissante (car $2 > 0$ et $5 > 1$), et de la suite arithmétique $(n+1)$ strictement croissante (car la raison $1 > 0$).

Ainsi, par somme de deux suites strictement croissantes, $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

4.a) Le programme complété est le suivant :

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u=5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

Attention : On pourrait croire que l'on a le choix dans la ligne 5 entre la forme récurrente et la forme explicite, mais il n'en est rien.

En effet, si on écrit simplement la forme explicite comme ci-dessous, on commet une erreur car le compteur « n=n+1 » est mal placé dans la boucle :

```
def suite_erreur():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u=2*(5**n)+n+1
        n=n+1
    return n
```

Il faudrait alors intervertir les lignes 5 et 6 pour avoir un script correct, mais ceci n'est pas possible d'après le script proposé dans l'énoncé :

```
def suite_bis():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        n=n+1
        u=2*(5**n)+n+1
    return n
```

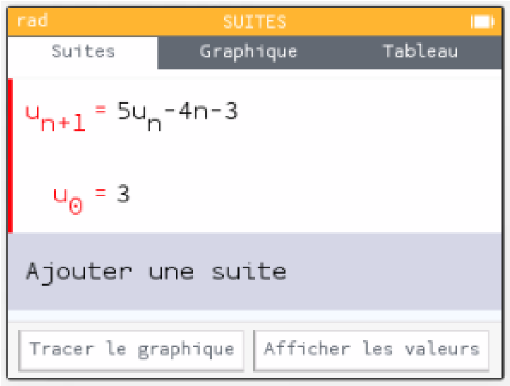
On en a directement la preuve dans la réponse à la question suivante.

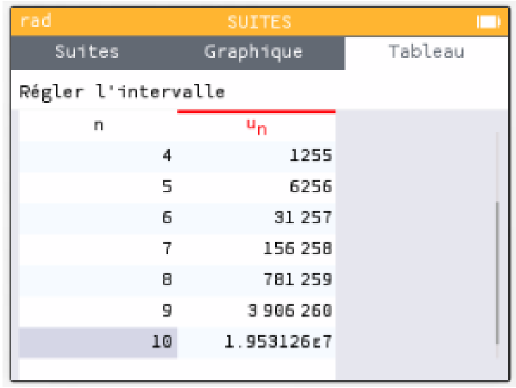
4.a)

```
>>> suite()
10
>>> suite_erreur()
11
>>> suite_bis()
10
```

La réponse correcte est bien : $\boxed{n=10}$

Si vous n'êtes pas convaincus et/ou que vous n'avez pas réussi à écrire le script Python, il est toujours possible d'obtenir ce résultat avec le menu « suites » de la calculatrice. Il est alors conseillé de préciser que vous avez utilisé cette fonction plutôt que le script Python :





Remarque : On pouvait utiliser ici indifféremment la forme récurrente ou la forme explicite.

Ex 3 :

$\boxed{1)\ A}$

On dérive les 4 fonctions proposées, toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_a'(x) = 0 + 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x = f(x) \quad \leftarrow \text{OK}$$

$$F_b'(x) = 1 \times e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x \neq f(x)$$

$$F_c'(x) = 1 \times e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x \neq f(x)$$

$$F_d'(x) = (x+1)e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right)e^x \neq f(x)$$

$\boxed{2)\ A}$

(d_1) est dirigée par $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et (d_2) est dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont ni strictement parallèles, ni confondues. Ceci élimine les réponses B et C

Puis $(d_1) \cap (d_2)$: $\begin{cases} 2+r = 1-s \\ 1+r = -1+s \\ -r = 2-s \end{cases} \iff \begin{cases} r = -1-s \\ 3+2r = 0 & (L_1+L_2) \\ 2 = 3-2s & (L_1+L_3) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} r = -1-s \\ r = -\frac{3}{2} \\ 2s = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = -1-s \\ r = -\frac{3}{2} \\ s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = -1-s = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ r = -\frac{3}{2} \\ s = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{compatibles}$$

Donc (d_1) et (d_2) sont sécantes au point I de paramètre $\begin{cases} r = -\frac{3}{2} \text{ de } (d_1) \\ s = \frac{1}{2} \text{ de } (d_2) \end{cases}$ c'est le même point

$\boxed{3)\ B}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{u_3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ dirige Δ

Dans le R.O.N., on a :

$\vec{n}\cdot\vec{u_3} = 2\times1+(-1)\times1+1\times(-1) = 2-1-1=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{u_3}$

Ainsi, Δ est parallèle à $\mathcal{P}$ (soit strictement, soit $\Delta\subset\mathcal{P}$)

En choisissant le point $A\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\in\Delta$ (de paramètre $u=0$), on teste si $A\in\mathcal{P}$.

$2x_A - y_A + z_A - 1 = 2\times2-4+1-1 = 4-4=0$ donc $A\in\mathcal{P}$

On a : $\begin{cases}\Delta /\!/ \mathcal{P}\\ A\in\Delta\\ A\in\mathcal{P}\end{cases} \Rightarrow \Delta\subset\mathcal{P}$

$\boxed{4)\ C}$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires (3^e composantes égales mais pas les autres),

donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont ni confondus, ni strictement parallèles.

Ceci élimine les réponses B et D. Ainsi $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Puis dans le R.O.N., on a :

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 1\times2 + -2\times1 + 1\times1 = 2-2+1 = 1 \neq 0$

les vecteurs normaux des deux plans ne sont pas orthogonaux, donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires.

$\boxed{5)\ D}$

Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = 1\times(-3) + 2\times 0 + 2\times 4 = -3+0+8 = 5 \quad \neq 0$

↳ exclut réponse A

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} EF = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{\overrightarrow{EF}^2} = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \text{ u.l.} \\ EG = \|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{\overrightarrow{EG}^2} = \sqrt{(-3)^2+0^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ u.l.} \end{cases}$$

Puis $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos\widehat{FEG} = 3\times 5\times\cos\alpha = 15\cos\alpha$

Or on a déjà calculé : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = 5$

D'où $15\cos\alpha = 5 \iff \cos\alpha = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Puis $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 71°$

← ⚠ vérifier calculatrice en mode "degré"

Ex 4 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln x$

1) a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0^- & \text{(th. croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 5x^2 + 2x = 0^+ \end{cases}$

facultatif

Donc par opérations sur les limites, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+}$

b) Au voisinage de l'infini, la limite d'un polynôme est égale à celle de son monôme de plus haut degré.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2 + 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2 = +\infty$

facultatif

Par ailleurs, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 \ln x = -\infty$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$" que l'on va lever en factorisant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2\left(5 + \frac{2}{x} - 2\ln x\right)$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln x = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 + \frac{2}{x} - 2\ln x = -\infty$

Puis comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient par produit :

$$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

2) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 10x + 2 - 2\left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$

$= 10x + 2 - 2\left(2x \cdot \ln(x) + x\right)$

$= 10x + 2 - 4x \cdot \ln(x) - 2x$

$= \boxed{8x + 2 - 4x \cdot \ln x}$

3) a) On admet dans l'énoncé que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = 8 + 0 - 4\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right)$

$= 8 - 4\left(\ln(x) + 1\right)$

$= 8 - 4\ln(x) - 4$

$= 4 - 4\ln x$

$= \boxed{4(1 - \ln x)}$

b) $\mathscr{C}_f$ au-dessus de ses tangentes $\Leftrightarrow$ f est convexe

$\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 4(1 - \ln x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant 1$

$\Leftrightarrow x \leqslant e$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in \left]0 ; e\right]}$

ⓒ D'après la question précédente :

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖ 2	↗	$2+4e$	↘	$-\infty$

$f'(e) = 8e + 2 - 4e \times \ln e$
$= 8e + 2 - 4e \times 1$
$= 2 + 4e$

Puis les limites en 0^+ et $+\infty$ sont données dans l'énoncé

4) ⓐ Procédons par disjonction de cas :

* Sur $]0 ; e[$, f' est minorée par 2 , donc l'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucun solution sur cet intervalle.

* Sur $[e ; +\infty[$, f' est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u>. On a $f'([e ; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) ; f'(e)]$

$=]-\infty ; 2+4e]$

Or $0 \in]-\infty ; 2+4e]$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\exists ! \alpha \in [e ; +\infty[, f'(\alpha) = 0$

* Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

Puis par balayage avec la calculatrice :

$f'(7) > 0$ et $f'(8) < 0$ donc $\alpha \in]7 ; 8[$

$f'(7{,}8) > 0$ et $f'(7{,}9) < 0$ donc $\alpha \in]7{,}8 ; 7{,}9[$

$f'(7{,}87) > 0$ et $f'(7{,}88) < 0$ donc $\boxed{\alpha \in]7{,}87 ; 7{,}88[}$

(b) On utilise la question précédente pour dresser le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

5) (a) On a : $f'(\alpha) = 0 \iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln \alpha = 0$

$$\iff 4\alpha + 1 - 2\alpha \ln \alpha = 0$$

$$\iff 2\alpha \ln \alpha = 4\alpha + 1$$

$$\iff \boxed{\ln \alpha = \frac{4\alpha+1}{2\alpha}} \quad \text{car } \alpha \neq 0$$

Puis $f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \ln \alpha$

$$= 5\alpha^2 + 2\alpha - \cancel{2}\alpha^{\cancel{2}} \times \frac{4\alpha+1}{\cancel{2\alpha}}$$

$$= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha$$

$$= \boxed{\alpha^2 + \alpha}$$

(b) On a $7{,}87 < \alpha < 7{,}88 \Rightarrow 7{,}87^2 < \alpha^2 < 7{,}88^2$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Rightarrow 7{,}87^2 + 7{,}87 < \alpha^2 + \alpha < 7{,}88^2 + 7{,}88$$

$$\Rightarrow 69{,}8069 < f(\alpha) < 69{,}9744$$

Or ceci permet uniquement de conclure que $f(\alpha) \in]69{,}8\ ;\ 70{,}0[$ qui est un encadrement d'amplitude $2 \times 10^{-1} = 0{,}2$, et non $10^{-1} = 0{,}1$

Du coup, il faut revenir à la question 4.a et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} : $\alpha \in]7{,}873\ ;\ 7{,}874[$

Puis $7{,}873^2 + 7{,}873 < f(\alpha) < 7{,}874^2 + 7{,}874 \Rightarrow \boxed{f(\alpha) \in]69{,}8\ ;\ 69{,}9[}$

<u>Remarque :</u> Il est fort possible qu'il y ait une erreur dans l'énoncé de la question 4.a) , dans laquelle il semble nécessaire de donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} et non 10^{-2} .

Dans la figure récapitulative ci-après, les coordonnées du maximum sont évidemment des valeurs approchées fournies par Geogebra.