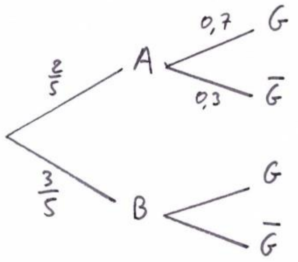
Ex1 :



$P(A) = \frac{2}{5}$

$P_A(G) = \frac{7}{10}$

$P(G) = \frac{12}{25} = 0,48$

$\boxed{1)\ C}$

$$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5} \times \frac{7}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{7}{25} = 0,28$$

$\boxed{2)\ B}$

$\{A ; B\}$ forme un système complet d'évènements

D'après la formule des probabilités totales,

$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G)$

$\Leftrightarrow P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G)$

$\Leftrightarrow P(B) \times P_B(G) = P(G) - P(A \cap G)$

$\Leftrightarrow P_B(G) = \dfrac{P(G) - P(A \cap G)}{P(B)} = \dfrac{0,48 - 0,28}{0,6} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{3)\ C}$

$X \sim \mathcal{B}(10 ; 0,48)$

D'où $P(X = 6) = \binom{10}{6} \times 0,48^6 \times (1 - 0,48)^{10-6} \simeq 0,188$ (à 10^{-3} près)

$\boxed{4)\ B}$

On cherche $n \in \mathbb{N}$ tq $P(X \leqslant n) \simeq 0,207$ (à 10^{-3} près)

On utilise la fonction de répartition (croissante) de la calculatrice :

(en testant les valeurs de n proposées)

$P(X \leqslant 2) \simeq 0,070$; $P(X \leqslant 3) \simeq 0,207$ et $P(X \leqslant 4) \simeq 0,427$

$\boxed{5)\ D}$

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}48^0 \times (1-0{,}48)^{10-0}$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times 0{,}52^{10}$$

$$= 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$$

Ex2 :

⇒ Partie A

1) Chaque mois, le nombre d'insectes u_n augmente de 60 %.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 0,6 \times u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = 1,6\, u_n$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = 1,6$ et de premier terme $u_0 = 0,1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = \boxed{0,1 \times 1,6^n}$

2) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,6^n = +\infty$ car $q > 1$

Puis par produit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ car $u_0 > 0$

3) On veut $u_n > 0,4 \Leftrightarrow 0,1 \times 1,6^n > 0,4$

$\Leftrightarrow 1,6^n > \dfrac{0,4}{0,1}$

$\Leftrightarrow 1,6^n > 4$

$\Leftrightarrow \ln(1,6^n) > \ln 4$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow n \ln 1,6 > \ln 4$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 4}{\ln 1,6}$ car $\ln 1,6 > 0$

Or $\dfrac{\ln 4}{\ln 1,6} \simeq 2,95$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc on a $u_n > 0,4$ à partir de $\boxed{n = 3}$

4) D'après la question précédente, le seuil critique de $0,4 \times 10^6$ insectes est dépassé dès le 3ème mois.
De plus, (u_n) est strictement croissante ($q > 1$ et $u_0 > 0$) et tend vers $+\infty$ (cf question ②).

Donc selon ce modèle, l'équilibre du milieu ne sera pas préservé.

=> Partie B :

Soit (v_n) : $v_0 = 0{,}1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1{,}6\, v_n - 1{,}6\, v_n^2$

1) $v_1 = 1{,}6\, v_0 - 1{,}6\, v_0^2 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}16 - 1{,}6 \times 0{,}01 = 0{,}16 - 0{,}016 \boxed{= 0{,}144}$

i.e $\boxed{144\,000 \text{ insectes}}$

2) ⓐ Soit f définie sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$

Soit $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$, $f(x) = x \iff 1{,}6x - 1{,}6x^2 = x$

$\iff 1{,}6x^2 - 0{,}6x = 0$

$\iff 16x^2 - 6x = 0$

$\iff 8x^2 - 3x = 0$

$\iff x(8x - 3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $8x - 3 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{3}{8}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 0 ; \frac{3}{8} \right\}}$$

ⓑ f est une fct polynôme du second degré concave car son coefficient dominant $-1{,}6$ est négatif.

Elle admet sur $\mathbb{R}$ un maximum en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}6}{2 \times (-1{,}6)} = \frac{1}{2}$

Ainsi, le prolongement $\tilde{f}$ de f sur $\mathbb{R}$ a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\tilde{f}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$		$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$ $-\infty$

Donc $\boxed{f \text{ est (strictement) croissante sur } [0 ; \frac{1}{2}]}$

ⓞⓤ f est dérivable sur I comme fonction polynôme et $\forall x \in I$, $f'(x) = -3{,}2x + 1{,}6$

avec $I = [0 ; \frac{1}{2}]$, Puis :

Soit $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0 \iff -3{,}2x + 1{,}6 \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1{,}6}{3{,}2} \iff x \leqslant \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{f \text{ est (strictement) croissante sur } [0 ; \frac{1}{2}]}$

3) a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0,1$ et $v_1 = 0,144$ $\Rightarrow 0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

et montrons que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f croissante sur $[0;\frac{1}{2}]$

Puis (HR) : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(\frac{1}{2})$ par croissance de f sur $[0;\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 0,4$

Avec $f(0) = 1,6 \times 0 - 1,6 \times 0^2 = 0$

et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6 \times \frac{1}{2} - 1,6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,8 - 1,6 \times \frac{1}{4} = 0,8 - 0,4 = 0,4 \leqslant \frac{1}{2}$

Donc par transitivité, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}}$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_{n+1} \geqslant v_n & \Rightarrow (v_n) \text{ est croissante} \\ v_n \leqslant \frac{1}{2} & \Rightarrow (v_n) \text{ est majorée par } \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant \frac{1}{2}$. D'après 3.a, on a même $\ell \in [0;\frac{1}{2}]$

c) ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Donc d'après la question B.2.a), $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{3}{8}$

Or il ne peut y avoir qu'une seule limite (théorème d'unicité de la limite)

On sait que (v_n) est croissante, minorée par ~~son~~ premier terme $v_0 = 0,1$

Donc $\ell = 0$ ne convient pas. D'où $\boxed{\ell = \frac{3}{8} = 0,375}$

D'après ce modèle, à très long terme, le nombre d'insectes (en croissance) atteindra 375 000 individus, inférieur à la taille critique de 400 000.

Ainsi, selon ce modèle, **l'équilibre du milieu naturel sera préservé.**

4) a) La fonction "seuil" renvoie le premier mois à partir duquel $v_n \geqslant a$, avec a donné en argument.

Or nous avons vu que (v_n) est majorée par 0,375

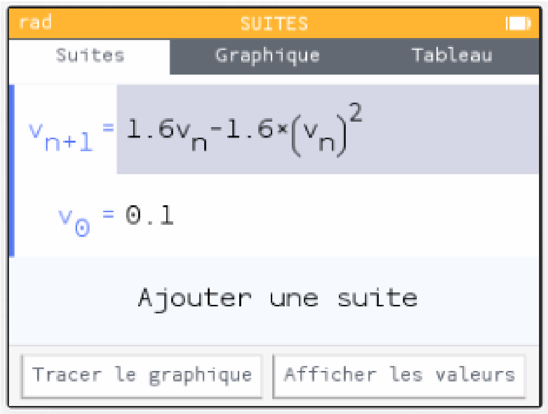
Donc si on saisit "seuil(0.4)", **la fonction ne renvoie aucun résultat** car l'algorithme ne cessera jamais de tourner.

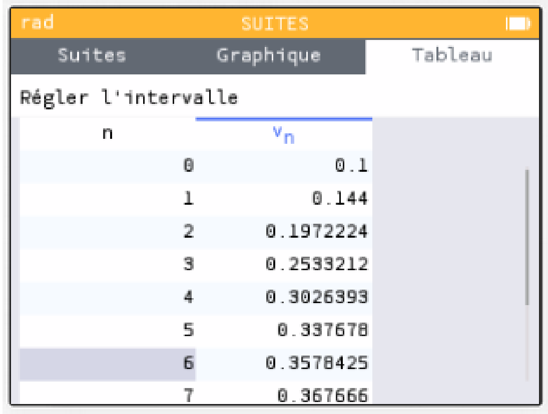
b) Si on saisit "seuil(0.35)", la fonction renvoie $\boxed{n = 6}$.

On peut l'observer directement en lançant le script, ou alors en saisissant la suite dans la calculatrice et en regardant le tableau de valeurs: $\begin{cases} v_5 \simeq 0,338 < 0,35 \\ v_6 \simeq 0,358 > 0,35 \end{cases}$

➔ Voir page suivante pour les copies d'écran Numworks

➔ En saisissant la suite dans la calculatrice :





➔ En lançant le script Python :

```python
def seuil(a):
    v=0.1
    n=0
    while v<a:
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil(0.35)
6
```

Ex 3 :

1) (a) Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\mathcal{P}_1$ a pour équation $2x+y-z+2=0$

Donc $\boxed{\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ est normal à } \mathcal{P}_1}$

(b) Dans le R.O.N., on a $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

D'où $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 2\times1 + 1\times(-1) + (-1)\times1 = 2-1-1 = 0$

Ainsi, $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$, ce qui implique que $\boxed{\mathcal{P}_1\perp\mathcal{P}_2}$

2) (a) $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$, donc $\mathcal{P}_2$ a une équation cartésienne de la forme $1\times x+(-1)\times y+1\times z+d=0$

$\Leftrightarrow x-y+z+d=0$

Puis $B\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\in\mathcal{P}_2 \Rightarrow x_B-y_B+z_B+d=0$

$\Rightarrow 1-1+2+d=0$

$\Rightarrow d=-2$

D'où $\mathcal{P}_2$: $\boxed{x-y+z-2=0}$

(b) Montrons que $\Delta\subset\mathcal{P}_1$ et $\Delta\subset\mathcal{P}_2$ en injectant sa représentation paramétrique dans les équations cartésiennes des deux plan.

* Pour $\mathcal{P}_1$: $2x+y-z+2 = 2\times0+(-2+t)-t+2 = 0$ donc $\Delta\subset\mathcal{P}_1$
* Pour $\mathcal{P}_2$: $x-y+z-2 = 0-(-2+t)+t-2 = 2-t+t-2 = 0$ donc $\Delta\subset\mathcal{P}_2$

De plus, comme $\mathcal{P}_1\perp\mathcal{P}_2$ d'après la question (1.b), ils sont sécants selon une droite.

On en conclut donc que : $\boxed{\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\Delta}$

3) a) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $M_t\begin{pmatrix}0\\-2+t\\t\end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$

D'où $\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix}-1\\t-3\\t-1\end{pmatrix}$, puis :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ AM_t = \|\overrightarrow{AM_t}\| = \sqrt{\overrightarrow{AM_t}^2} = \sqrt{(-1)^2+(t-3)^2+(t-1)^2}$$

$$= \sqrt{1+t^2-6t+9+t^2-2t+1}$$

$$\boxed{= \sqrt{2t^2-8t+11}}$$

b) H est le projeté orthogonal de A sur Δ, donc AH est la distance de A à Δ, i.e. le minimum de AM_t.

Une fonction $u > 0$ et son carré u^2 ont les mêmes variations (sous réserve de dérivabilité) car $(u^2)' = \underbrace{2u}_{>0}.u'$.

Elles admettent ainsi un minimum au même endroit.

Dans notre cas, on a $\begin{cases} A \notin \mathcal{P}_1 \\ A \notin \mathcal{P}_2 \\ \Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \end{cases} \Rightarrow A \notin \Delta \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ AM_t > 0$

D'où AM_t et AM_t^2 sont minimales en même temps.

AM_t^2 est une fct polynôme du second degré, convexe car de coefficient dominant positif, qui admet donc un minimum en $\alpha = \dfrac{-(-8)}{2\times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$

Ainsi AM_t est minimale pour $t = 2$

D'où $AH = AM_2 = \sqrt{2\times 2^2 - 8\times 2+11} = \sqrt{8-16+11} = \boxed{\sqrt{3}}$

4)

ⓐ $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{P}_1$ donc le vecteur $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_1$ dirige $\mathcal{D}_1$

De plus, comme $\mathcal{D}_1$ passe par $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on a :

$$\boxed{\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

ⓑ $\begin{cases} H_1 \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{D}_1 \perp \mathcal{P}_1 \\ A \in \mathcal{D}_1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{P}_1 = \{H_1\}$

D'où $H_1 : \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$

$\Rightarrow 2(1+2t)+(1+t)-(1-t)+2=0$

$\Rightarrow 2+4t\cancel{+1}+t\cancel{-1}+t+2=0$

$\Rightarrow 6t+4=0$

$\Rightarrow t = -\frac{4}{6} = \frac{-2}{3}$

Puis $H_1 : \begin{cases} x = 1+2t = 1+2\times\frac{-2}{3} = 1-\frac{4}{3} = \frac{-1}{3} \\ y = 1+t = 1+\frac{-2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1-t = 1-\frac{-2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$ D'où $\boxed{\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{P}_1 = \left\{H_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}\right\}}$

5) Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $H_1\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\5/3\end{pmatrix}$, $H_2\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ pt de Δ de paramètre $t=2$

Puis $\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-4/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}-4/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{H_1H}\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$, AH_1HH_2 est un parallélogramme.

Enfin, $\overrightarrow{AH_1}\cdot\overrightarrow{H_1H} = \frac{-4}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{-2}{3}\times\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{-4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} = 0$ donc $\overrightarrow{AH_1} \perp \overrightarrow{H_1H}$

Ainsi (AH_1) est perpendiculaire à (H_1H)

Ceci permet de conclure que $\boxed{AH_1HH_2 \text{ est un rectangle}}$

Ex 4 :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) a) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+e^{-x} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

b) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+ \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par composition puis somme,

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1$

Comme $\ln 1 = 0$, on a par composition $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

Ceci signifie que $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses (d'équation $y=0$) pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

c) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{-\cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-x}}(e^{x}+1)} = \boxed{\dfrac{-1}{e^{x}+1}}$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0 \Rightarrow e^{x}+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{e^{x}+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{-1}{e^{x}+1} < 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2)

ⓐ T_0 a pour équation : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

On a $\begin{cases} f'(0) = \dfrac{-1}{1+e^0} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2} \\ f(0) = \ln\left(1+e^{-0}\right) = \ln(1+1) = \ln 2 \end{cases}$

D'où T_0 : $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \ln 2}$

ⓑ La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -1 \times \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$

On $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} e^x > 0 \\ (1+e^x)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$

ⓒ Le graphe d'une fonction convexe est situé au-dessus de toutes ses tangentes sur son ensemble de définition.

En particulier, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T_0 sur $\mathbb{R}$

Ceci se traduit par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln 2}$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(-x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) - \ln\left(1+e^{-(-x)}\right)$

$$= \ln\left(1+e^{-x}\right) - \ln\left(1+e^{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^{-x}\cancel{\left(e^{x}+1\right)}}{\cancel{1+e^{x}}}\right)$$

$$= \ln\left(e^{-x}\right)$$

$$\boxed{= -x}$$

b) Soient $M_a\begin{pmatrix}-a\\ f(-a)\end{pmatrix}$ et $N_a\begin{pmatrix}a\\ f(a)\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

Déterminons le coefficient directeur m_a de la droite $(M_a N_a)$.

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $m_a = \dfrac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \dfrac{f(a) - f(-a)}{a-(-a)} \underset{\text{D'après (3.a)}}{=} \dfrac{-a}{a+a} = \dfrac{-a}{2a} = \dfrac{-1}{2}$

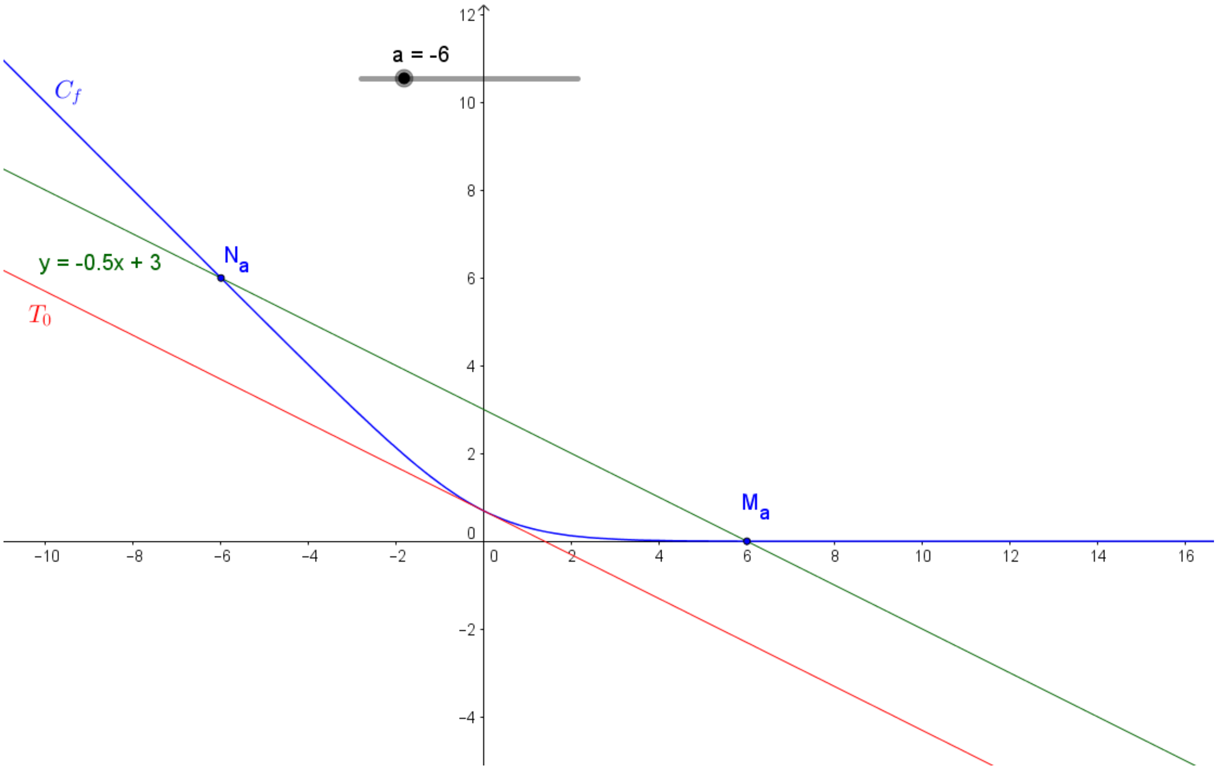
Le coefficient directeur m_a de $(M_a N_a)$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}^*$,

donc toutes les droites $(M_a N_a)$ ont le même coefficient directeur $m = \frac{-1}{2}$

Par ailleurs, T_0 a également pour coefficient directeur $m = \frac{-1}{2}$

Ainsi, $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*,\ T_0 \,//\, (M_a N_a)}$

➔ Voir Geogebra page suivante et en fichier joint



a = -6
C_f
y = -0.5x + 3
N_a
T_0
M_a