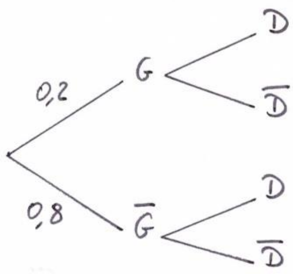
Ex 1 :



$P(G \cap D) = 0,002$

$P(D) = 0,082$

$\boxed{1)\ B}$

On a $P(G \cap D) = P(G) \times P_G(D)$

D'où $P_G(D) = \dfrac{P(G\cap D)}{P(G)} = \dfrac{0,002}{0,2} = \dfrac{\cancel{2} \times 10^{-3}}{\cancel{2} \times 10^{-1}} = 10^{-2} = 0,01$

$\boxed{2)\ B}$

$(G ; \overline{G})$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$P(D) = P(G \cap D) + P(\overline{G} \cap D)$

$\iff P(\overline{G} \cap D) = P(D) - P(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08$

$\boxed{3)\ B}$

$P_D(G) = \dfrac{P(G \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,002}{0,082} = \dfrac{2}{82} = \dfrac{1}{41} \simeq 0,024$ (à 10^{-3} près)

$\boxed{4)\ B}$

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}082)$

Fonction de répartition à la calculatrice

D'où $P(X > 2) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \simeq 1 - 0{,}211 \simeq 0{,}789$

(à 10^{-3} près)

$\boxed{5)\ C}$

On veut $P(X = 0) > 0{,}4$

$\iff \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} > 0{,}4$

$\iff 1 \times 1 \times (1 - 0{,}082)^n > 0{,}4$

$\iff 0{,}918^n > 0{,}4$

$\iff \ln(0{,}918^n) > \ln 0{,}4$ car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \ln 0{,}918 > \ln 0{,}4$

$\iff n < \dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}918}$ car $\ln 0{,}918 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}918} \simeq 10{,}7$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

La plus grande valeur possible pour n est donc 10

Rem : On vérifie à la calculatrice :

$\rightarrow$ pour $n = 10$, $P(X=0) = \binom{10}{0} \times 0{,}082^0 \times 0{,}918^{10} \simeq 0{,}425 > 0{,}4$

$\rightarrow$ pour $n = 11$, $P(X=11) = \binom{11}{0} \times 0{,}082^0 \times 0{,}918^{11} \simeq 0{,}390 < 0{,}4$

Ex 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - 8\ln x$

1) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} -8\ln x = +\infty \end{cases}$

Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

2) On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2\left(1 - 8\,\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

Donc par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 8\,\dfrac{\ln x}{x^2} = 1 - 8 \times 0 = 1$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient par produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2x - 8 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \boxed{\dfrac{2(x^2-4)}{x}}$

4) f' est du signe de $x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}_+^*$, polynôme du second degré à coefficient dominant positif (donc convexe) et admettant 2 racines dans $\mathbb{R}$ qui sont -2 (hors de l'ensemble de définition de f) et $2 \in \mathbb{R}_+^*$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$4 - 8\ln 2$	↗	$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 8\ln 2$
$= 4 - 8\ln 2$

5) f est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u> sur $]0;2]$

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 4 - 8\ln 2 \simeq -1{,}5 < 0$

Ainsi $0 \in [f(2) ; \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)[$ i.e $0 \in f(]0;2])$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0;2]}$

6) On admet que : $\exists ! \, \beta \in [2;+\infty[\, , \, f(\beta) = 0$

En utilisant les questions 4) et 5), on obtient :

x	0		α		2		β		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$4-8\ln 2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f	‖	$+$	0	$-$			0	$+$	

7) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k = f(x) + k$

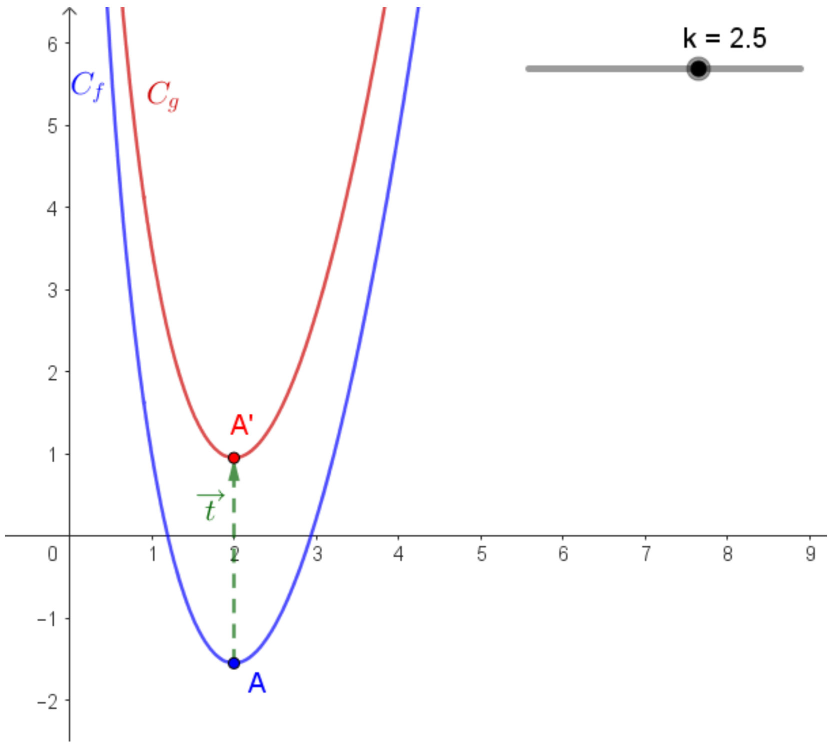
$\mathcal{C}_{g_k}$ est la translatée de $\mathcal{C}_f$ de vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ puisque g_k et f diffèrent uniquement d'une constante $k \in \mathbb{R}$. (cf figures Geogebra)

Vu autrement, on a $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; g'_k(x) = f'(x)$ donc g_k admet un minimum en $x = 2$ (comme f) qui vaut $g_k(2) = f(2) + k$

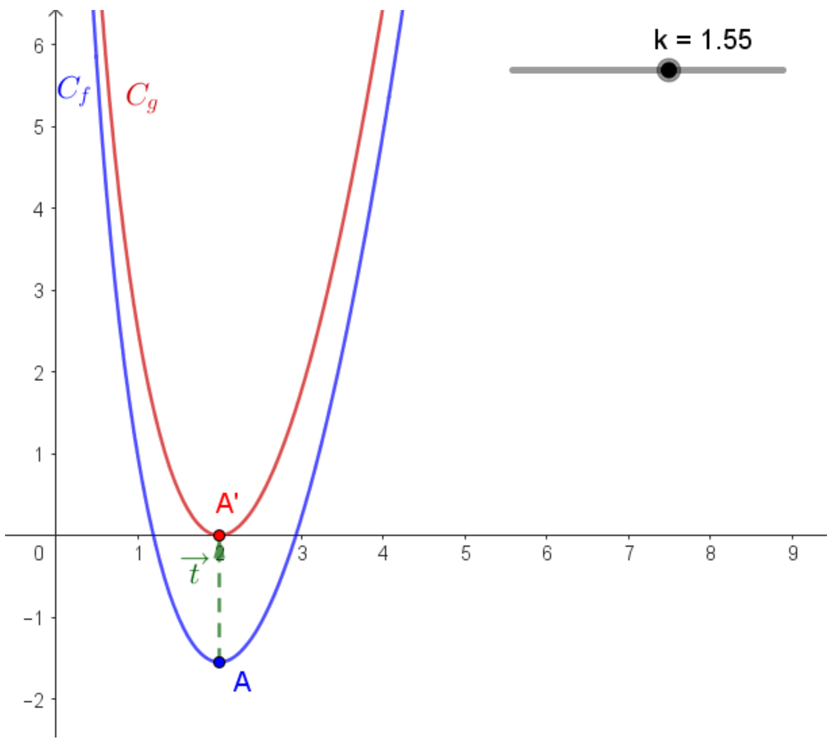
Puis on veut $g_k(2) \geqslant 0 \iff f(2) + k \geqslant 0 \iff k \geqslant -f(2)$

Il faut donc choisir $\boxed{k = -4 + 8\ln 2}$

➔ Voir les figures Geogebra à la page suivante



Puis en choisissant $k = -f(2) = -4 + 8\ln(2) \simeq 1{,}55$, on obtient le résultat attendu :



Ex 3 :

⇒ Partie A :

1) Soit (u_n) : $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 1{,}3$

$$u_2 = 0{,}9\, u_1 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 3 + 1{,}3 = 2{,}7 + 1{,}3 = \boxed{4}$$

$$u_3 = 0{,}9 \times u_2 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 4 + 1{,}3 = 3{,}6 + 1{,}3 = \boxed{4{,}9}$$

Il y aura donc 400 questions sur la FAQ le 2ème mois, et 490 questions le 3ème mois.

2) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$

Initialisation : $13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^1 = 13 - \frac{100 \times \cancel{9} \times 10^{-1}}{\cancel{9}} = 13 - 10 = 3 = u_1$

⇒ $\mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$

et montrons que $u_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 1{,}3 &\overset{HR}{=} 0{,}9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) + 1{,}3 \\ &= 11{,}7 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + 1{,}3 \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} \end{aligned}$$

⇒ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right)$

$$= \cancel{13} - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times 0{,}9 - \cancel{13} + \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$$

$$= \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times (1 - 0{,}9)$$

$$= \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times 0{,}1$$

$$= \frac{10}{9} \times 0{,}9^n > 0 \quad \text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0{,}9^n > 0$$

$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

4) Le programme renvoie la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $u_n > p$, avec p choisi en argument.

On veut donc $u_n > 8{,}5$

$$\Leftrightarrow 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n > 8{,}5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{100}{9} \times 0{,}9^n > 8{,}5 - 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{9} \times 0{,}9^n < 4{,}5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}9^n < 4{,}5 \times \frac{9}{100}$$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) < \ln 0{,}405$$

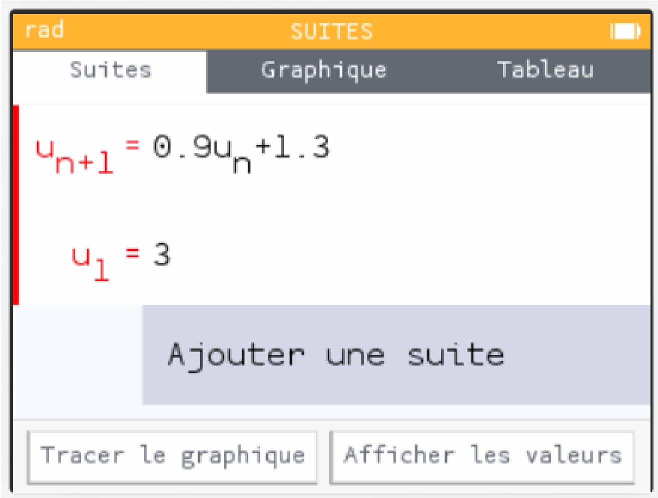
$$\Leftrightarrow n \ln 0{,}9 < \ln 0{,}405$$

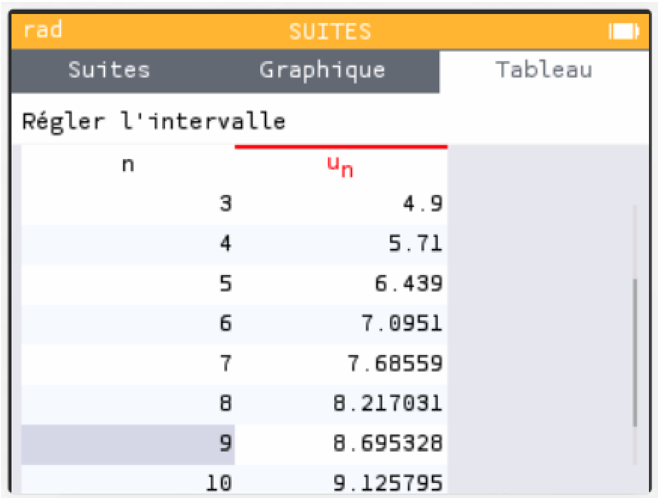
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}405}{\ln 0{,}9}$$

or $\frac{\ln 0{,}405}{\ln 0{,}9} \simeq 8{,}58$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc le programme renvoie $\boxed{9}$

Comme (u_n) est croissante, $\boxed{\text{les 850 questions sur la FAQ seront atteintes à partir du 9}^{\text{ème}} \text{ mois.}}$

<u>Remarque :</u> Pour celles et ceux qui préfèrent éviter le calcul (pourtant préférable le jour du Bac), vous pouvez lire le tableau de valeurs de la calculatrice. Attention à bien saisir $u_1 = 3$ et non $u_0 = 3$





On vérifie également avec le programme Python que l'on peut saisir dans la calculatrice :

```python
def seuil(p):
    n=1
    u=3
    while u<=p:
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

```
>>> seuil(8.5)
9
```

$\Rightarrow$ Partie B : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19(n-1)}$

1) $v_1 = 9 - 6 \times e^{-0,19(1-1)} = 9 - 6 \times e^{0} = 9 - 6 \times 1 = 9 - 6 \boxed{= 3}$ (valeur exacte)

$v_2 = 9 - 6 \times e^{-0,19(2-1)} = 9 - 6 \times e^{-0,19} \boxed{\simeq 4,04}$ (à 10^{-2} près)

2) On veut $v_n > 8,5$

$\Leftrightarrow \quad 9 - 6\, e^{-0,19(n-1)} > 8,5$

$\Leftrightarrow \quad -6\, e^{-0,19(n-1)} > 8,5 - 9$

$\Leftrightarrow \quad -6\, e^{-0,19(n-1)} > -0,5$

$\Leftrightarrow \quad e^{-0,19(n-1)} < \dfrac{0,5}{6}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{-0,19(n-1)}\right) < \ln \dfrac{1}{12}$ $\quad$) par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \quad -0,19(n-1) < -\ln 12$ $\quad$) car $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln \frac{1}{a} = -\ln a$

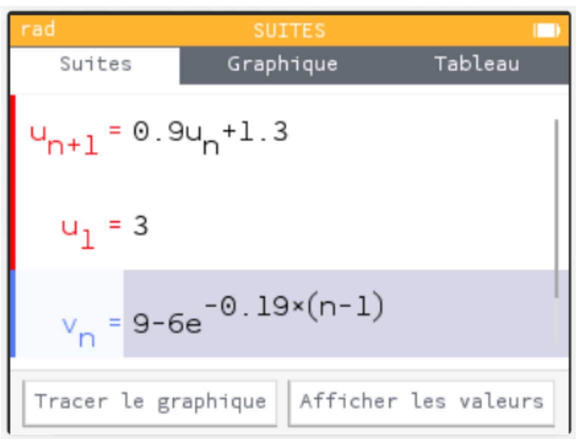
$\Leftrightarrow \quad 0,19(n-1) > \ln 12$

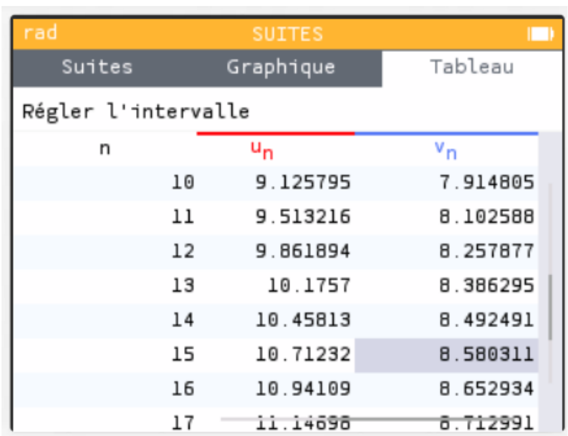
$\Leftrightarrow \quad n - 1 > \dfrac{\ln 12}{0,19}$

$\Leftrightarrow \quad n > 1 + \dfrac{\ln 12}{0,19}$

or $1 + \dfrac{\ln 12}{0,19} \simeq 14,08$ $\quad$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $v_n > 8,5$ à partir de $\boxed{n = 15}$





n	u_n	v_n
10	9.125795	7.914805
11	9.513216	8.102588
12	9.861894	8.257877
13	10.1757	8.386295
14	10.45813	8.492491
15	10.71232	8.580311
16	10.94109	8.652934
17	11.14698	8.712991

⇒ Partie C :

1) Pour la 1ère modélisation avec (u_n), on atteint les 850 questions et on les dépasse à partir du 9ème mois.

Pour la 2ème modélisation avec (v_n), les 850 questions sont atteintes et dépassées à partir du 15ème mois.

La 1ère modélisation conduit donc à procéder le plus tôt à la modification.

2) * On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ car $0{,}9 \in]-1;1[$

Puis par opérations avec les limites, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) = 13 - \frac{100}{9} \times 0 = 13$$

Pour la 1ère modélisation, il y aura à long terme $\boxed{1300}$ questions sur la FAQ.

* Puis on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} -0{,}19(n-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

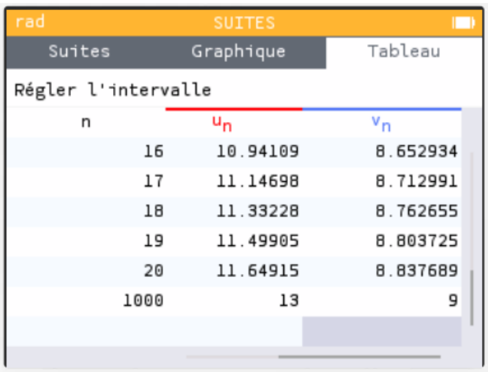
Donc par composition : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0{,}19(n-1)} = 0^+$

Puis par opérations avec les limites, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} 9 - 6 \times e^{-0{,}19(n-1)} = 9 - 6 \times 0 = 9$$

Pour la 2ème modélisation, il y aura à long terme $\boxed{900}$ questions sur la FAQ.

* Conclusion : A long terme, il y aura plus de questions pour la 1ère modélisation.



n	u_n	v_n
16	10.94109	8.652934
17	11.14698	8.712991
18	11.33228	8.762655
19	11.49905	8.803725
20	11.64915	8.837689
1000	13	9

Ex4:

1) Dans le R.O.N. $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a : $\boxed{E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ; \ C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

2) On a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ qui dirige (EC) et $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in (EC)$, donc :

$$\boxed{(EC) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

3) Dans le R.O.N., on a $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ dirigent (GBD) et ne sont pas colinéaires (positions du 0 dans les coordonnées des vecteurs).

Puis $\begin{cases} \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 0+1-1 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{BG} \\ \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DG} = 1\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 1 = 1+0-1 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{DG} \end{cases}$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{EC}$ directeur de (EC) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires dirigeant (GBD), donc $\overrightarrow{EC}$ est normal à (GBD).

On en déduit que $\boxed{(EC) \perp (GBD)}$

4) a) $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (GBD), donc ce plan a une équation cartésienne de la forme : $1\times x + 1\times y + (-1)\times z + d = 0$

$\iff x + y - z + d = 0$

Puis $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in (GBD)$ donc $x_B + y_B - z_B + d = 0 \iff 1+0+0+d = 0 \iff d = -1$

D'où (GBD) : $\boxed{x + y - z - 1 = 0}$

ⓑ On sait que $(GBD) \cap (EC) = \{I\}$ d'où :

$$\begin{cases} x_I + y_I - z_I - 1 = 0 \\ x_I = t_I \\ y_I = t_I \\ z_I = 1 - t_I \end{cases}$$

$\Rightarrow t_I + t_I - (1 - t_I) - 1 = 0$

$\Rightarrow 2t_I - 1 + t_I - 1 = 0$

$\Rightarrow 3t_I - 2 = 0$

$\Rightarrow 3t_I = 2$

$\Rightarrow t_I = \frac{2}{3}$

Puis $\begin{cases} x_I = t_I = \frac{2}{3} \\ y_I = t_I = \frac{2}{3} \\ z_I = 1 - t_I = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$ D'où $\boxed{(GBD) \cap (EC) = \left\{ I\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}}$

ⓒ On a $\begin{cases} (EC) \perp (GBD) \\ (GBD) \cap (EC) = \{I\} \end{cases}$ $\Rightarrow$ I est le projeté orthogonal de E sur (GBD)

Donc $d(E, (GBD)) = EI$ Avec $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$$= \|\overrightarrow{EI}\|$$
$$= \sqrt{\overrightarrow{EI}^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{3 \times \frac{4}{9}}$$
$$\boxed{= \frac{2\sqrt{3}}{3}} \text{ (u.l.)}$$

5) ⓐ La diagonale d'un carré de côté c a pour longueur $c\sqrt{2}$, cas particulier du théorème de Pythagore

Or [BD], [DG] et [BG] sont respectivement les diagonales des carrés ABCD, CDHG et BCGF de côtés $c = 1$ (ABCDEFGH est un cube d'arête 1)

D'où $BD = DG = BG = c\sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (u.l.)

Ainsi, $\boxed{\text{le triangle BDG est équilatéral de côté } \sqrt{2} \text{ u.l.}}$

b) Soit J le milieu de [BD], donc $BJ = \frac{1}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u.l.

Comme le triangle BDG est équilatéral, (JG) est à la fois hauteur, médiane, médiatrice et bissectrice du triangle.

Ainsi (JG) est perpendiculaire à (BD), d'où $\mathcal{A}_{BDG} = \frac{1}{2} \times BD \times JG$

Or dans le triangle BJG rectangle en J, d'après le théorème de Pythagore,

$BG^2 = BJ^2 + JG^2 \Leftrightarrow JG^2 = BG^2 - BJ^2 = \sqrt{2}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Puis $JG = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (u.l.) (*) voir remarque en bas de page

Enfin, $\mathcal{A}_{BDG} = \frac{1}{2} \times BD \times JG = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{4} \times \sqrt{12} = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_{BDG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (u.a.)}}$

6) On a $\begin{cases} (EC) \perp (GBD) \\ (EC) \cap (GBD) = \{I\} \end{cases}$ OU I est le projeté orthogonal de E sur (GBD)

Donc [EI] est la hauteur du tétraèdre EGBD issue du sommet E, et donc relative à la base BDG (triangle).

D'où $V_{EGBD} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{BDG} \times EI$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}_1} \times \frac{\cancel{2}^1\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}$

$\boxed{= \frac{1}{3} \text{ (u.v.)}}$

(*) Rem : Pour la question 5.b), on pouvait aussi utiliser les coordonnées de $J\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $JG = \sqrt{\vec{JG}^2}$ avec $\vec{JG}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$