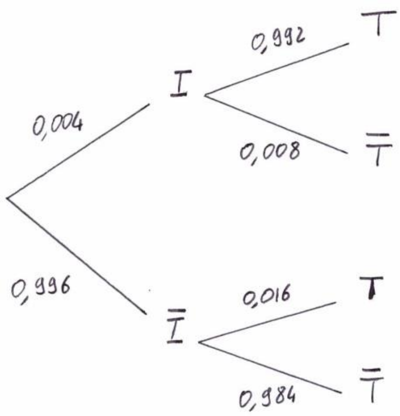
Ex1 :

⇒ Partie A :

1)



2) ⓐ $P(\overline{I} \cap \overline{T}) = P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0,996 \times 0,984 = 0,980064 \boxed{\simeq 0,980}$ (à 10^{-3} près)

ⓑ $\{I ; \overline{I}\}$ forme un système complet d'événements

Donc d'après la formule des probabilités totales

$P(T) = P(I \cap T) + P(\overline{I} \cap T)$

$= P(I) \times P_I(T) + P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(T)$

$= 0,004 \times 0,992 + 0,996 \times 0,016$

$= 0,003968 + 0,015936$

$= 0,019904$

$\boxed{\simeq 0,020}$ (à 10^{-3} près)

⚠ calculer avec les valeurs exactes

ⓒ $P_T(I) = \dfrac{P(I \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,003968}{0,019904} \boxed{\simeq 0,200}$ (à 10^{-3} près)

ⓓ $P\left((I \cap \overline{T}) \cup (\overline{I} \cap T)\right) = P(I \cap \overline{T}) + P(\overline{I} \cap T)$ car $(I \cap \overline{T})$ et $(\overline{I} \cap T)$ sont incompatibles

$= P(I) \times P_I(\overline{T}) + 0,015936$

$= 0,004 \times 0,008 + 0,015936$

$= 0,000032 + 0,015936$

$= 0,015968$

$\boxed{\simeq 0,016}$ (à 10^{-3} près)

⇒ Partie B

3) (a) On répète $n = 100$ fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la vache a un test positif" est égale à $p = 0{,}02$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0{,}02)}$

(b) $P(X=3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1-0{,}02)^{100-3} = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times 0{,}98^{97} \boxed{\simeq 0{,}182}$

(à 10^{-3} près)

(c) $\boxed{P(X \leqslant 3) \simeq 0{,}859}$ en utilisant la fonction de répartition de la calculatrice.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}02)$

On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

$\iff 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99$

$\iff P(X=0) \leqslant 0{,}01$

$\iff \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times (1-0{,}02)^{n-0} \leqslant 0{,}01$

$\iff 1 \times 1 \times 0{,}98^n \leqslant 0{,}01$

$\iff 0{,}98^n \leqslant 0{,}01$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln(0{,}98^n) \leqslant \ln 0{,}01$

$\iff n \ln 0{,}98 \leqslant \ln 0{,}01$

car $\ln 0{,}98 < 0$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}98}$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}98} \simeq 227{,}95$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Il faut donc au ~~minimum~~ $\boxed{n = 228}$ vaches.

Ex2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$

1) a) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$.

On lit directement sur le tracé de $\mathcal{C}'$ l'ordonnée $f'(1)$ du point d'abscisse 1 : $\boxed{f'(1) = 2}$

b) On a : f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante

On peut ainsi lire que $\boxed{f \text{ est convexe sur } [7{,}4\ ;\ +\infty[}$

2) a) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \ln x = -\infty$

Par produit, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

b) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Puis $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} 2 - \ln x = +\infty$

Par produit, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = 0 \iff (2 - \ln x) . \ln x = 0$$
$$\iff 2 - \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 0$$
$$\iff \ln x = 2 \text{ ou } x = 1$$
$$\iff x = e^2 \text{ ou } x = 1$$

D'où $\boxed{\mathcal{C} \cap (O ; \vec{\imath}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

4) ⓐ On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(0 - \frac{1}{x}\right) \times \ln(x) + (2 - \ln x) \times \frac{1}{x}$

$$= - \frac{\ln x}{x} + \frac{2 - \ln x}{x}$$
$$= \frac{2 - 2 \ln x}{x}$$
$$= \boxed{\frac{2(1 - \ln x)}{x}}$$

ⓑ Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2}{x} > 0$, f' est du signe de $1 - \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 1 \iff x \leqslant e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$f(e) = (2 - \ln e) \times \ln e$
$= (2 - 1) \times 1$
$= 1$

5) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln(x) - 2)}{x^2}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{2(\ln(x)-2)}{x^2} \geqslant 0$

car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{2}{x^2} > 0$

$\iff \ln(x) - 2 \geqslant 0$

$\iff \ln x \geqslant 2$

$\iff x \geqslant e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	convexe		concave	

Inflexion

f'' s'annule et change de signe en e^2, donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en $x = e^2$

De plus, $f(e^2) = (2 - \ln(e^2)) \times \ln(e^2) = (2 - 2\ln e) \times 2\ln e$
$= (2 - 2\times 1) \times 2 \times 1$
$= 0$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ admet pour unique point d'inflexion } I\begin{pmatrix} e^2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Rem : On retrouve le résultat de la question 1.b) car $e^2 \simeq 7{,}4$ (à 10^{-1} près)

On peut également retrouver le résultat de la question 1.a) en utilisant la question 4.a) : $f'(1) = \dfrac{2(1-\ln 1)}{1} = \dfrac{2(1-0)}{1} = 2$

Ex 3 :

(u_n) : $u_1 = e^{-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$

1) $u_2 = e^{-1}\left(1+\frac{1}{1}\right) \times u_1 = e^{-1} \times 2 \times e^{-1} = \boxed{2e^{-2} = \frac{2}{e^2}}$

$u_3 = e^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\right) \times u_2 = e^{-1} \times \frac{3}{\cancel{2}} \times \cancel{2} e^{-2} = \boxed{3e^{-3} = \frac{3}{e^3}}$

2) (L_2) : $\boxed{u = 1/e}$

(L_4) : $\boxed{u = (1/e) * (1 + 1/i) * u}$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1+1$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$

$\Rightarrow \boxed{1 + \frac{1}{n} \leqslant e}$ Par transitivité, car $2 \leqslant e$ ($e \simeq 2{,}718$)

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \times u_n$

$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

⚠ Ne pas oublier

On a admis que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

Puis on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{n} \leqslant e \Rightarrow e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant e^{-1} \times e$

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

c) On a admis que (u_n) est minorée par 0 et on vient de démontrer que (u_n) est décroissante. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geqslant 0$

4) a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n}{e^n}$

Initialisation : Pour $n=1$, on a $\dfrac{n}{e^n} = \dfrac{1}{e^1} = \dfrac{1}{e} = u_1 \quad \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = \dfrac{n}{e^n}$ et mq $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{e^{n+1}}$

On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot u_n = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{n+1}{n} \times u_n$

$$= \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{\cancel{n}_{1}} \times \frac{\cancel{n}^{1}}{e^n} \quad \text{(HR)}$$

$$= \frac{n+1}{e^{n+1}} \quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n}{e^n}}$

b) D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$

Puis par passage à l'inverse, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+}$

Ex 4 :

$\boxed{1)\ C}$

$3x_R + 2y_R + z_R - 4 = 3\times 1 + 2\times(-3) + 1 - 4 = 3 - 6 - 3 = -6 \neq 0$ donc $R\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} \notin \mathcal{P}$

$3x_S + 2y_S + z_S - 4 = 3\times 1 + 2\times 2 + (-1) - 4 = 3 + 4 - 5 = 2 \neq 0$ donc $S\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \notin \mathcal{P}$

$3x_T + 2y_T + z_T - 4 = 3\times 1 + 2\times 0 + 1 - 4 = 3 + 0 + 1 - 4 = 0$ donc $T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

$3x_U + 2y_U + z_U - 4 = 3\times 2 + 2\times(-1) + 1 - 4 = 6 - 2 - 3 = 1 \neq 0$ donc $U\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \notin \mathcal{P}$

$\boxed{2)\ D}$

Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{2^2+0^2+4^2} = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\ BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{0^2+2^2+(-5)^2} = \sqrt{0+4+25} = \sqrt{29} \end{cases}$$

Ceci élimine les réponses A ; B et C car toutes les mesures sont différentes.

De plus, comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, la réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en A.

$\boxed{3)\ D}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ dirige Δ et $\vec{n}_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$

On voit rapidement que $\vec{u}\cdot\vec{n}_1 = -3+0+3 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}_1$, d'où $\Delta \subset \mathcal{P}$ ou $\Delta /\!/ \mathcal{P}$

Regardons si la repr. param. de Δ vérifie l'éq. cartésienne de $\mathcal{P}$:

$3(1-t) + 2\times 2 + (-4+3t) - 4 = 3 - \cancel{3t} + \cancel{4} - \cancel{4} + \cancel{3t} - 4 = -1 \neq 0$ donc $\Delta \not\subset \mathcal{P}$

$\Rightarrow D$

4) A

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC} \iff \cos \widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \dfrac{\cancel{20}^{\,10}}{\cancel{2}_{\,1}\sqrt{5} \times \sqrt{29}} = \dfrac{10}{\sqrt{145}}$

Puis $\widehat{ABC} = \cos^{-1} \dfrac{10}{\sqrt{145}} \; \boxed{\simeq 34°}$ (au degré près)

5) B

On a $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{Q}$

On remarque que $\overrightarrow{n_2} = -2\,\overrightarrow{n_1}$ donc $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_1}$ sont colinéaires.

Ainsi, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont soit confondus, soit strictement parallèles.

Ceci exclut les reponses C et D.

Soit $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

Or $-6x_D - 4y_D - 2z_D + 7 = -6 \times 0 - 4 \times 0 - 2 \times 4 + 7 = -1 \neq 0$ donc $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \notin \mathcal{Q}$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont strictement parallèles, d'où $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$

$\Rightarrow$ B