Ex 1 :

$\boxed{1)\ D}$

Il suffit de dériver les 4 fonctions proposées, toutes dérivables sur $\mathbb{R}$.

$F_a'(x) = 2\left(1 \times e^{x^2-3} + x \times 2x \times e^{x^2-3}\right) = 2\left(2x^2+1\right) e^{x^2-3} \neq f(x)$

$F_b'(x) = 4x\, e^{x^2-3} + \left(2x^2+1\right) \times 2x\, e^{x^2-3} = \left(4x^2 + 6x\right) e^{x^2-3} \neq f(x)$

$F_c'(x) = \frac{1}{2}\left(1 \times e^{x^2-3} + x \times 2x \times e^{x^2-3}\right) = \frac{1}{2}\left(2x^2+1\right) e^{x^2-3} \neq f(x)$

$F_d'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2-3} = x \cdot e^{x^2-3} = f(x) \quad \Rightarrow D$

OU $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\, e^{x^2-3} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2-3} = \frac{1}{2} \times u'(x) \times e^{u(x)}$

avec $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = x^2 - 3$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet pour primitive $\frac{1}{2} e^{u(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2-3}$

$\boxed{2)\ C}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{2n+1} = e^{2n} \times e^1 = e \times \left(e^2\right)^n = u_0 \times q^n$

avec $u_0 = e$ et $q = e^2$

$\boxed{3)\ A}$

L'algorithme doit tourner tant que la condition $u_n > 10\,000$ n'est <u>pas</u> remplie. Donc la ligne 4 est : " while u <= 10 000 "

$\Rightarrow A$

$\boxed{4)\ B}$

La suite (u_n) étant arithmético-géométrique, nous nous doutons fortement que la suite auxiliaire (v_n) proposée va être géométrique.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 60 \\
&= 1{,}2\, u_n + 12 + 60 \\
&= 1{,}2\, u_n + 72 \\
&= 1{,}2\, u_n + 1{,}2 \times 60 \\
&= 1{,}2\,(u_n + 60) \\
&= 1{,}2\, v_n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$

Ex 2 :

1) a) Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

D'où $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

La présence du zéro en 3ème composante de $\vec{AC}$ et pas dans celle de $\vec{AB}$ permet de dire que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires (on peut également montrer que le système $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$ est incompatible).

$\boxed{\text{Ainsi, les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés et forment un plan } \mathcal{P} = (ABC)}$

b) Dans le R.O.N., on a $C\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$, d'où $\vec{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \vec{CD} \cdot \vec{AB} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 3 = 4 - 1 - 3 = 0 & \text{donc } \vec{CD} \perp \vec{AB} \\ \vec{CD} \cdot \vec{AC} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0 & \text{donc } \vec{CD} \perp \vec{AC} \end{cases}$

$\vec{CD}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires qui dirigent le plan $\mathcal{P}$. Ainsi $\vec{CD}$ est normal à $\mathcal{P}$, ce qui implique que $\boxed{(CD) \perp \mathcal{P}}$

c) $\begin{cases} 2x_A + y_A - z_A - 3 = 2 \times 1 + 0 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0 \\ 2x_B + y_B - z_B - 3 = 2 \times 3 + (-1) - 2 - 3 = 6 - 1 - 2 - 3 = 0 \\ 2x_C + y_C - z_C - 3 = 2 \times 2 + (-2) - (-1) - 3 = 4 - 2 + 1 - 3 = 0 \end{cases}$

les coordonnées des 3 points A, B et C vérifient l'équation proposée, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P} = (ABC)$ est : $\boxed{2x + y - z - 3 = 0}$

2) a) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

D'où $CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{\overrightarrow{CD}^2} = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \boxed{\sqrt{6} \text{ u.l.}}$

b) On a $\begin{cases} C \in \mathcal{P} \\ (CD) \perp \mathcal{P} \end{cases}$, donc C est le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$.

Ainsi, par définition, CD est la plus courte distance du point D au plan $\mathcal{P}$. Ceci signifie que $\forall M \in \mathcal{P}$ tq $M \neq C$, $MD > CD$

$\Leftrightarrow MD > \sqrt{6}$

$\boxed{\text{Il n'existe donc pas de point } M \text{ du plan } \mathcal{P} \text{ différent de } C \text{ tq } MD = \sqrt{6}}$

3) a) Il faut vérifier que le paramétrage de Δ vérifie l'équation de $\mathcal{P}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} 2x+y-z-3 &= 2\times 0 + (2+t) - (-1+t) - 3 \\ &= 0 + 2 + \cancel{t} + 1 - \cancel{t} - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $M\begin{pmatrix}0\\2+t\\-1+t\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ i.e. $\boxed{\Delta \subset \mathcal{P}}$

b) $H \in \Delta$ car H est le proj. orth de D sur Δ, d'où $\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 2 + t_H \\ z_H = -1 + t_H \end{cases}$

Puis comme $D\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-4\\2+t_H+1\\-1+t_H+2\end{pmatrix}$ i.e. $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-4\\t_H+3\\t_H+1\end{pmatrix}$

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige Δ, on a dans le R.O.N. :

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\overrightarrow{DH} = 0 &\Leftrightarrow 0\times(-4) + 1\times(t_H+3) + 1\times(t_H+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 + t_H + 3 + t_H + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2t_H + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2t_H = -4 \\ &\Leftrightarrow \boxed{t_H = -2} \end{aligned}$$

c) Comme H est le proj. orth. de D sur Δ, on a :

$\text{dist}(D ; \Delta) = DH = \|\overrightarrow{DH}\|$

Or $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} -4 \\ t_H+3 \\ t_H+1 \end{pmatrix}$ et $t_H = -2$, donc $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

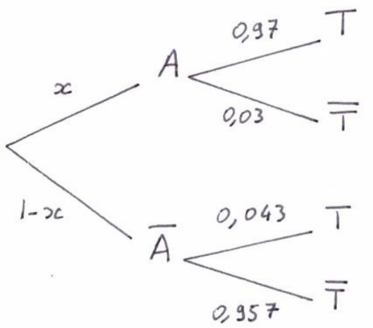
Puis $\text{dist}(D ; \Delta) = \sqrt{\overrightarrow{DH}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$

$\boxed{= 3\sqrt{2} \text{ u.l.}}$

Ex 3 :

⇒ Partie A

1)



2) a) $\{A ; \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(A \cap T) + P(\overline{A} \cap T) \\ &= P(A) \times P_A(T) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(T) \\ &= x \times 0,97 + (1-x) \times 0,043 \\ &= 0,97x + 0,043 - 0,043x \\ &= 0,927x + 0,043 \end{aligned}$$

Or on a $P(T) = 0,2$ $\iff 0,927x + 0,043 = 0,2$

$\iff 0,927x = 0,157$

$\iff x = \dfrac{0,157}{0,927} = \boxed{\dfrac{157}{927} \simeq 0,169 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}}$

3) $P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,97.x}{0,2} = 5 \times 0,97 \times \dfrac{157}{927} \simeq 0,821 > 0,8$

On a bien $\boxed{P_T(A) > 0,8}$

⇒ Partie B :

1) On répète $n = 150$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la personne est allergique" est égale à $p = 0{,}08$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}08$

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(150\,;\,0{,}08)}$$

2) $P(X = 20) = \binom{150}{20} \times p^{20} \times (1-p)^{150-20} = \binom{150}{20} \times 0{,}08^{20} \times 0{,}92^{130}$

d'où $\boxed{P(X = 20) \simeq 0{,}008}$ (à 10^{-3} près)

3) 10 % de 150 personnes représente $0{,}1 \times 150 = 15$ personnes.

Ainsi, on recherche $P(X \geqslant 15)$

Or $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14)$

$\simeq 1 - 0{,}780$ On utilise la fonction de répartition de la calculatrice.

$\boxed{\simeq 0{,}220}$ (à 10^{-3} près)

Ex 4 :

⟹ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$

1) On admet dans l'énoncé que g est dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 2 \times \frac{-1}{x^2} - \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

$= \frac{-2x + 2 + x^2}{x^3}$

Or $\forall x \in I$, $x^3 > 0$, donc $\boxed{g' \text{ est du signe de } P : x \mapsto x^2 - 2x + 2}$

2) Etude du polynôme P :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$ donc aucune racine réelle.

Ainsi P est du signe de son coefficient dominant $1 > 0$

D'où $\forall x \in I$, $P(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{g \text{ strictement croissante sur } I = \mathbb{R}_+^*}$

3) g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

donc également sur $[\frac{1}{2} ; 1]$.

On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 4 - \ln 2 = -\ln 2 < 0$

et $g(1) = \frac{2}{1} - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 2 - 1 + 0 = 1 > 0$

Ainsi $0 \in \left[g\left(\frac{1}{2}\right) ; g(1)\right] = g\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\exists !\, \alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right],\ g(\alpha) = 0}$

4) g est continue, strictement croissante et s'annule en α donc $\begin{cases} g(\alpha) = 0 \\ x \in]0 ; \alpha[\Rightarrow g(x) < 0 \\ x > \alpha \Rightarrow g(x) > 0 \end{cases}$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$,

⇒ **Partie B :** $\forall x \in I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x \times \ln x$

1) On admet que f est deux fois dérivable sur I, et $\forall x \in I$, $f'(x) = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

D'où $\forall x \in I$, $f''(x) = e^x\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) + e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

$$= \boxed{e^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)} = e^x \times g(x)$$

2) a) On a $\forall x \in I$, $f''(x) = e^x \times g(x)$

Or $\forall x \in I$, $e^x > 0$ donc f'' est du signe de g.

Ainsi, d'après la partie A :

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b) f'' s'annule une seule fois en α, ce qui montre que s'il y a un point d'inflexion, alors il est unique et a pour abscisse α.

De plus, comme f'' change de signe en α, le point $A\begin{pmatrix}\alpha \\ f(\alpha)\end{pmatrix}$ est $\boxed{\text{l'unique point d'inflexion de } \mathcal{C}_f}$.

c) En utilisant les deux questions précédentes, on obtient :

x	0		α		$+\infty$
f	‖	concave	inflexion	convexe	

3) a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) On a $g(\alpha) = 0 \iff \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha^2} + \ln \alpha = 0$

$\iff \ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1 - 2\alpha}{\alpha^2}$

Puis $f'(\alpha) = e^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \ln \alpha\right) = e^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1-2\alpha}{\alpha^2}\right) = e^\alpha\left(\dfrac{\alpha + 1 - 2\alpha}{\alpha^2}\right)$

$\iff \boxed{f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)}$

c) D'après la partie A, on sait que $\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

or on a vu que $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \neq 0$ et $g(1) = 1 \neq 0$

Donc en réalité on a : $\alpha \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[\iff \frac{1}{2} < \alpha < 1$

$\iff -1 < -\alpha < -\frac{1}{2}$

$\iff 0 < 1 - \alpha < \frac{1}{2}$

Ainsi, $1 - \alpha > 0$

Par ailleurs, on a $e^\alpha > 0$ et $\alpha^2 > 0$ car $\alpha \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[\Rightarrow \alpha^2 \in \left]\frac{1}{4} ; 1\right[$

D'où $\dfrac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha) > 0$ i.e. $\boxed{f'(\alpha) > 0}$

De plus, en utilisant le tableau de signes de f'' demandé à la question B. 2. a, on obtient :

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$f'(\alpha)$	$\nearrow$	

Ainsi f' admet pour minimum $f'(\alpha) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

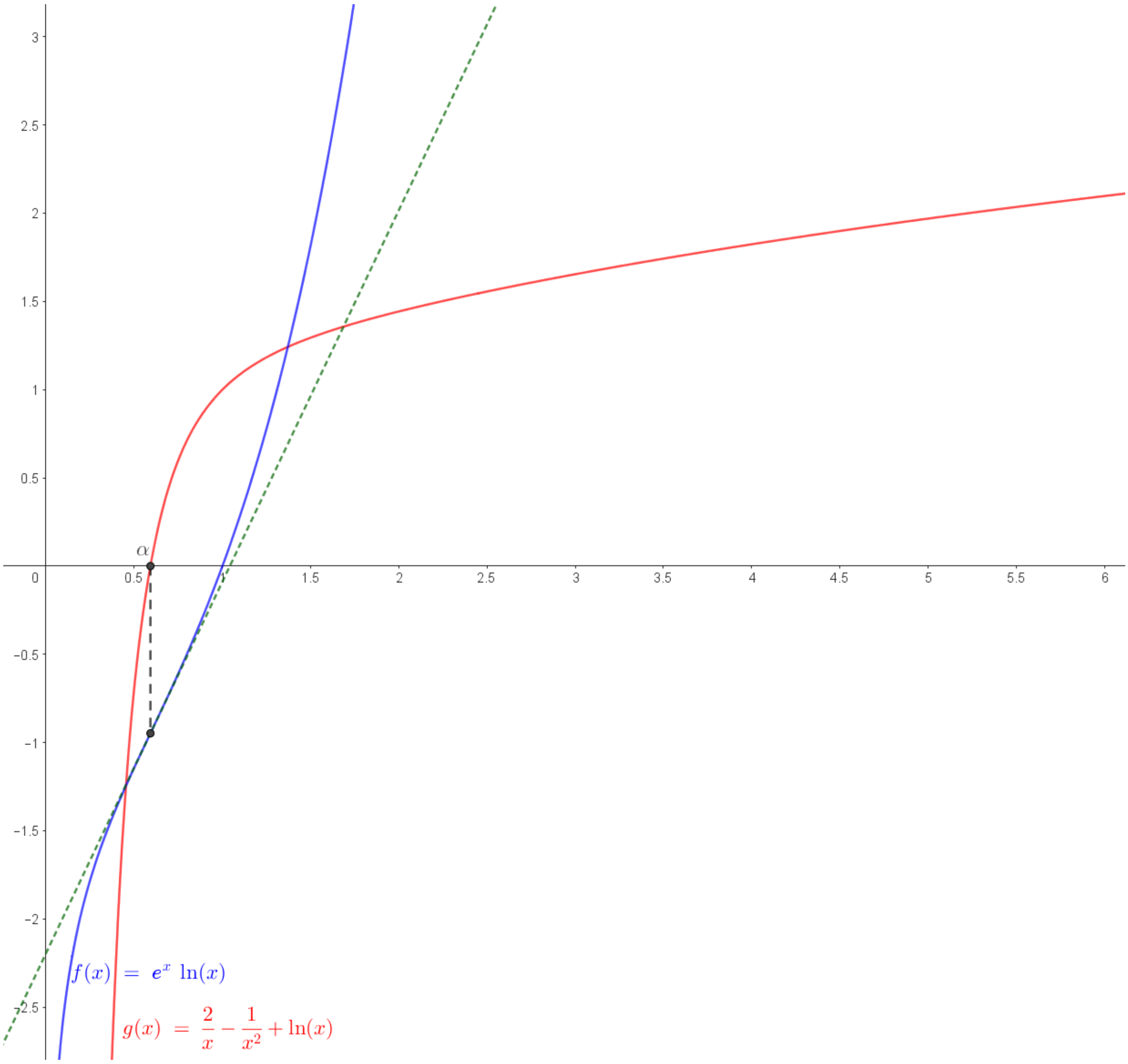
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) > 0}$

(d) On déduit de la question précédente que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ayant déjà été déterminées, on peut dresser le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

➔ Voir page suivante pour les représentations graphiques


α
$f(x) = e^x \ln(x)$
$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$