Ex 1 :

⇒ Partie A : ⚠ Il ne s'agit pas d'un R.O.N. , seulement d'un repère orthogonal

1) $\mathcal{T} = (AB)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}$

Ainsi, $m = \frac{3}{4}$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$.

D'où $\mathcal{T}$ a une équation réduite de la forme $y = \frac{3}{4}x + p$

Or $A\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}$ d'où $y_A = \frac{3}{4}x_A + p \iff p = y_A - \frac{3}{4}x_A$

$\iff p = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times 0$

$\iff p = \frac{1}{2}$

D'où $\mathcal{T}$: $\boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$

OU

Ainsi, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x & 1 \\ y - \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 0$

$\iff \frac{3}{4}x - \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\iff \boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$

2) $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente $\mathcal{T}$ en O, puis $\mathcal{C}_f$ semble au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}_-$ et en dessous de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}_+$.

Donc il semble que : $\boxed{\begin{cases} f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_- \\ f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}}$ et donc point d'inflexion en O

⇒ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-3x}}$

1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-\left(0+(-3)\times e^{-3x}\right)}{\left(1+e^{-3x}\right)^2} = \boxed{\frac{3\,e^{-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-3x} > 0 \Rightarrow 3e^{-3x} > 0$

De même, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-3x} > 0 \Rightarrow 1+e^{-3x} > 0 \Rightarrow \left(1+e^{-3x}\right)^2 > 0$

Par quotient de fonctions strictement positives, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$

D'où $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

3) a) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0^+$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{1+0} = \boxed{1}$

b) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+e^{-3x} = +\infty$

Par passage à l'inverse : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}99 \iff \dfrac{1}{1+e^{-3x}} = 0{,}99 \iff 1+e^{-3x} = \dfrac{1}{0{,}99} \iff 1+e^{-3x} = \dfrac{100}{99}$

$\iff e^{-3x} = \dfrac{100}{99} - 1 \iff e^{-3x} = \dfrac{1}{99} \iff \ln\left(e^{-3x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{99}\right)$

$\iff -3x = -\ln 99 \iff x = \dfrac{\ln 99}{3}$

D'où $\boxed{\alpha = \dfrac{\ln 99}{3}}$

⇒ Partie C :

1) On a $f(0) = \dfrac{1}{1+e^{-3\times 0}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

et $f'(0) = \dfrac{3\times e^{-3\times 0}}{\left(1+e^{-3\times 0}\right)^2} = \dfrac{3\times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

D'où $\mathcal{T}$: $y = f'(0)\times(x-0) + f(0) \iff \boxed{y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 9e^{-3x} > 0 \\ \left(1+e^{-3x}\right)^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f''$ est du signe de $e^{-3x}-1$ sur $\mathbb{R}$

Puis $e^{-3x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{-3x} \geqslant 1 \iff e^{-3x} \geqslant e^0 \iff -3x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$

3)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f		convexe	Inflexion	concave	

ⓐ On a : $f''(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$ donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_-}$

ⓑ f'' s'annule et change de signe en 0, donc $\boxed{A\begin{pmatrix}0\\ f(0)\end{pmatrix} \text{ est un point d'inflexion.}}$

4) $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente $\mathcal{T}$ en 0, avec $A\begin{pmatrix}0\\ f(0)\end{pmatrix}$ point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Ainsi, en utilisant le tableau de convexité ci-dessus, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{T}$ sur sa partie convexe et en dessous de $\mathcal{T}$ sur sa partie concave. D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Position relative		$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{T}$	Intersection en $A(0 ; \frac{1}{2})$	$\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{T}$	

Ex 2 :

$\Rightarrow$ Partie A : $f(x) = x - \ln(1+x)$

1) On veut $1+x > 0$ car $x \mapsto \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $1+x > 0 \iff x > -1$ i.e. $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1;+\infty[}$

2) On admet que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ que l'on notera I.

$\forall x \in I,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \boxed{\dfrac{x}{1+x}}$

3) ⓐ

x	-1		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1+x$	0		$+$		
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

ⓑ $f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$

Comme f admet 0 pour minimum (en $x = 0$), on obtient que :

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

4) ⓐ $\forall x \in I,\ f(x) = x - \ln(1+x)$

$= \ln(e^x) - \ln(1+x)$

$\boxed{= \ln\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right)}$

(b) On a : $\forall x > 0$ ⚠, $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x} \times \dfrac{e^x}{x}\right)$

Or on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (théorème des croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Puis par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} \times \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, on obtient par composition : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Rem 1 :

On pouvait aussi écrire : $\forall x \in I$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right) = \ln\left(\dfrac{e \times e^x}{e(1+x)}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{e} \times \dfrac{e^{x+1}}{x+1}\right)$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+1}}{x+1} = +\infty$

Par produit, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e} \times \dfrac{e^{x+1}}{x+1}\right) = +\infty$ puis par composition : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Rem 2 : Ce n'était pas demandé, mais on obtenait assez facilement que

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

En effet, $\lim\limits_{x \to -1^+} 1+x = 0^+$ puis par composition $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to -1^+} -\ln(1+x) = +\infty$ puis par somme, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ Partie B : Soit (u_n) : $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$
$= f(u_n)$

1) $u_1 = u_0 - \ln(1+u_0) = 10 - \ln(1+10) = 10 - \ln 11 \boxed{\simeq 7{,}602}$ (à 10^{-3} près)

2) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 10 \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$

D'après A.3.a), f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Donc HR $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$

$\Rightarrow u_{n+1} \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} - \ln(1+u_n) - \cancel{u_n} = -\ln(1+u_n)$

Or d'après la question précédente, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0 \Rightarrow 1 + u_n \geqslant 1$

$\Rightarrow \ln(1+u_n) \geqslant \ln 1$ Par (stricte) croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \ln(1+u_n) \geqslant 0$

$\Rightarrow -\ln(1+u_n) \leqslant 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ décroissante.}}$

4) (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 0$.

5) f est continue (car dérivable) sur $]-1 ; +\infty[$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Donc d'après le théorème du point fixe, la limite l de (u_n) est solution de l'équation $l = f(l)$

$\Leftrightarrow l = l - \ln(1+l)$

$\Leftrightarrow \ln(1+l) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + l = 1$ en composant par l'exponentielle

$\Leftrightarrow l = 0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Ex3:

1) Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix}$

D'où $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$

La 3ème coordonnée de $\vec{AC}$ est nulle et $\vec{AC}\neq\vec{0}$ mais pas celle de $\vec{AB}$, donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$

2) On a $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -1\times(-5)+1\times(-5)+1\times 0 = 5-5+0 = 0$ donc $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

Ainsi, $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A.}}$

3) Comme nous n'avons pas de vecteur normal, il faut montrer que les coordonnées des 3 points A ; B et C vérifient l'équation cartésienne proposée.

$$\begin{cases} -x_A+y_A-2z_A+5 = -3+0-2\times1+5 = -3+0-2+5 = 0 \\ -x_B+y_B-2z_B+5 = -2+1-2\times2+5 = -2+1-4+5 = -6+6 = 0 \\ -x_C+y_C-2z_C+5 = -(-2)+(-5)-2\times1+5 = 2-5-2+5 = 0 \end{cases}$$

D'où (ABC) a pour équation cartésienne : $\boxed{-x+y-2z+5=0}$

4) $(\Delta)\perp(ABC)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ normal à (ABC) est un vecteur directeur de (Δ).

Comme $S\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\in(\Delta)$, on a :

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = 4-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

5) $(\Delta) \cap (ABC)$: $\begin{cases} -x+y-2z+5=0 \\ x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = 4-2t \end{cases}$

$\Rightarrow -(1-t)+(-2+t)-2(4-2t)+5=0$

$\Rightarrow -1+t-2+t-8+4t+5=0$

$\Rightarrow 6t-6=0$

$\Rightarrow t=1$

D'où $\begin{cases} x_H = 1-t_H = 1-1=0 \\ y_H = -2+t_H = -2+1 = -1 \\ z_H = 4-2t_H = 4-2\times 1 = 2 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{(\Delta)\cap(ABC) = \left\{H\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}}$

6) Dans le R.O.N., on a $S\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Puis $SH = \|\overrightarrow{SH}\| = \sqrt{\overrightarrow{SH}^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \boxed{\sqrt{6} \text{ u.l.}}$

7) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $H\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ et de rayon HB, avec $B\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \pi \times R^2 = \pi \times HB^2 = \pi \times \overrightarrow{HB}^2 = \pi \times (2^2+2^2+0^2) = \boxed{8\pi \text{ u.a.}}$

8) On a $\begin{cases} \mathcal{D} \subset (ABC) \\ (\Delta) \perp (ABC) \\ S \in (\Delta) \\ (\Delta)\cap(ABC) = \{H\} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $[SH]$ est la hauteur du cône de sommet S relative à la base $\mathcal{D}$

D'où $V_{\text{cône}} = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \times SH}_{\text{Volume du cylindre}} = \dfrac{1}{3} \times 8\pi \times \sqrt{6} = \boxed{\dfrac{8\sqrt{6}}{3}\pi \text{ u.v.}}$

Ex 4 :

$\boxed{1)\ B}$

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}04)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{50}{0} \times 0{,}04^0 \times (1-0{,}04)^{50-0} = 1 - 1 \times 1 \times 0{,}96^{50}$

$\simeq 0{,}870$ à 10^{-3} près

$\boxed{2)\ B}$

$P(3 < X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 3)$

$\boxed{3)\ C}$

On cherche le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tq $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$

A la calculatrice (avec la fonction de répartition (qui est croissante), on obtient :

$P(X \leqslant 2) \simeq 0{,}677 < 0{,}95$

$P(X \leqslant 3) \simeq 0{,}861 < 0{,}95$

$P(X \leqslant 4) \simeq 0{,}951 \geqslant 0{,}95 \Rightarrow k = 4$

$\boxed{4)\ A}$

$X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}04)$ avec $n \in \mathbb{N}$

$P(X = n) = \binom{n}{n} \times 0{,}04^n \times (1-0{,}04)^{n-n} = 1 \times 0{,}04^n \times 1 = 0{,}04^n$

$\boxed{5)\ A}$

La fonction "seuil(x)" renvoie le plus petit rang n tel que $1 - 0{,}96^n \geqslant x$

i.e. tq $1 - P(X=0) \geqslant x$, i.e tq $P(X \geqslant 1) \geqslant x$