Ex 1 :

⇒ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln(x^2) + x - 2$

1) * On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x^2 = -\infty$

Puis par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$

* On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$

Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2) On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \dfrac{2x}{x^2} + 1 = \dfrac{2}{x} + 1 = \dfrac{x+2}{x}$

On sur $\mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{g \text{ strictement croissante}}$

3) ⓐ g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus, on a $g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\exists !\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ g(\alpha) = 0}$

(b) Sans autre information que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on trace le graphe de g à la calculatrice pour avoir une première localisation grossière de α, ici entre 1 et 2.

On a : $g(1) < 0$ et $g(2) > 0$ donc $\alpha \in]1;2[$

Puis $g(1,3) < 0$ et $g(1,4) > 0$ donc $\alpha \in]1,3;1,4[$

Puis $g(1,37) < 0$ et $g(1,38) > 0$ donc $\boxed{\alpha \in]1,37;1,38[}$

Nous avons procédé par balayage.

4) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en α, donc on a :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

⇒ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{x-2}{x} \cdot \ln x$

1) (a) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x - 2 = -2$ donc par quotient : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{x} = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, on obtient par produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

(b) $\boxed{\text{L'axe des ordonnées (d'équation } x = 0\text{) est asymptote verticale à } \mathcal{C}_f}$

2) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0^+$

Puis comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, on obtient par produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on écrit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(-2 \times \frac{-1}{x^2}\right) \ln(x) + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{x}$

$$= \frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln(x^2) + x - 2}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

4) Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, f' est du signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise le résultat de la question A.4) :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

⇒ Partie C :

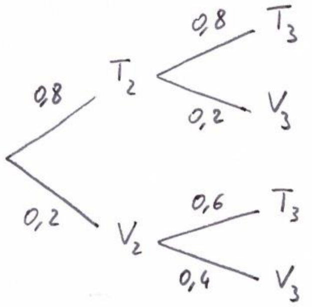
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - \ln x = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x) - \ln x = \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \ln x = -\frac{2 \ln x}{x}$

Puis soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-2 \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 0 \iff x \leq 1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \ln x$		$+$	0	$-$	
Position relative		$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_{\ln}$	intersection $I\binom{1}{0}$	$\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_{\ln}$	

Ex 2 :

1)

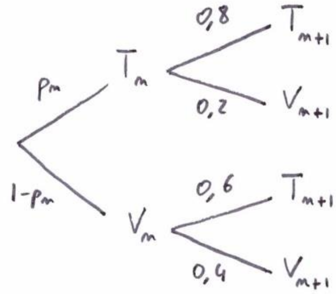


2) $\{T_2 ; V_2\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_3 = P(T_3) &= P(T_2 \cap T_3) + P(V_2 \cap T_3) \\ &= P(T_2) \times P_{T_2}(T_3) + P(V_2) \times P_{V_2}(T_3) \\ &= 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,6 \\ &= 0,64 + 0,12 \\ &\boxed{= 0,76} \end{aligned}$$

3) $$P_{V_3}(T_2) = \frac{P(T_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{P(T_2) \times P_{T_2}(V_3)}{1 - P(T_3)} = \frac{0,8 \times 0,2}{1 - 0,76} = \frac{0,16}{0,24} = \frac{16}{24} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

4)



$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{T_n ; V_n\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = P(T_{n+1}) &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(V_n \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(T_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 \\ &= 0,8\,p_n + 0,6 - 0,6\,p_n \\ &\boxed{= 0,2\,p_n + 0,6} \end{aligned}$$

6) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, $0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{1-1} = 0{,}75 + 0{,}25 \times 1 = 1 = p_1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$

et montrons que $p_{n+1} = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n}$

$$\begin{aligned} p_{n+1} = 0{,}2\,p_n + 0{,}6 &\overset{HR}{=} 0{,}2\left(0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}\right) + 0{,}6 \\ &= 0{,}15 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n} + 0{,}6 \\ &= 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}}$

7) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} p_n &= 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1} \\ &= 0{,}75 + \frac{0{,}25}{0{,}2} \times 0{,}2^{n} \\ &= 0{,}75 + 1{,}25 \times 0{,}2^{n} \end{aligned}$$

Puis $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ car $0{,}2 \in]-1;1[$

D'où par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}75 + 1{,}25 \times 0 \boxed{= 0{,}75}$

Interprétation : A très long terme, M. Durand utilisera les transports en commun avec une probabilité de 0,75 (3 jours sur 4).

<u>Rem :</u> En considérant que $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$, on pourrait dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0 = 0{,}75$

Ex 3 :

$\boxed{1)\ B}$

On dérive les fonctions F proposées jusqu'à tomber sur l'expression de f

$$F_a'(x) = x \times e^x + \frac{x^2}{2} e^x = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^x \neq f(x)$$

$$F_b'(x) = 1 \times e^x + (x-1) e^x = (x - 1 + 1) e^x = x e^x = f(x)$$

$\boxed{2)\ C}$

On veut $\dfrac{x-1}{2x+4} \geqslant 0$

Or $x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

et $2x + 4 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{2x+4}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -2[\cup [1 ; +\infty[$

$\boxed{3)\ D}$

h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 1 \times e^x + (x+1) e^x = (x+2) e^x$

Puis $\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = 1 \times e^x + (x+2) e^x = (x+3) e^x$

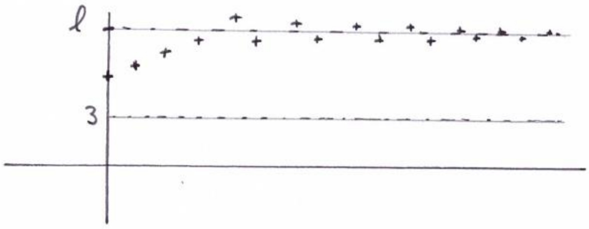
$h''(x) \geqslant 0 \iff (x+3) e^x \geqslant 0 \iff x + 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3$

D'où h est convexe sur $[-3 ; +\infty[$ et concave sur $]-\infty ; -3]$

$\boxed{4)\ B}$

On a $\forall n \in E,\ u_n \geqslant 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Nous savons donc que $l \geqslant 3$ (B) mais que le minorant proposé n'est qu'un minorant parmi d'autres, donc n'a aucune raison d'être la limite, ce qui élimine A. De plus, une limite n'est pas nécessairement atteinte, sauf cas particuliers (suites stationnaires, ...), ce qui élimine D.
Enfin, le théorème de la convergence monotone est une implication simple. La réciproque (réponse C) est fausse. Voici un contre-exemple pour les 3 cas considérés :



$\boxed{5)\ D}$

Soit (w_n) : $w_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = \frac{1}{n} w_n$

Tout d'abord, $\frac{1}{n}$ n'étant pas constant, (w_n) ne peut pas être géométrique, ce qui élimine la réponse A.

Puis $w_1 = 2$; $w_2 = \frac{1}{1} \cdot w_1 = 2$; $w_3 = \frac{1}{2} w_2 = 1$; $w_4 = \frac{1}{3} w_3 = \frac{1}{3}$

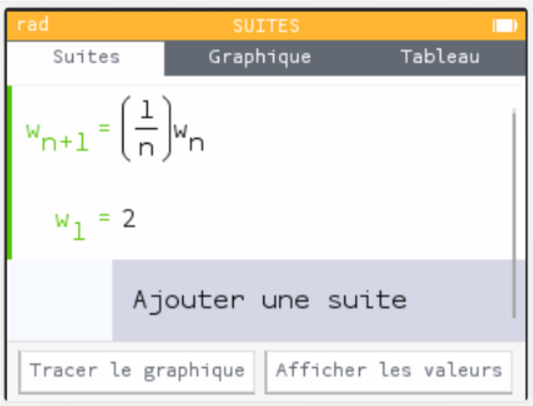
$w_5 = \frac{1}{4} w_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{15}$ ce qui élimine la réponse C.

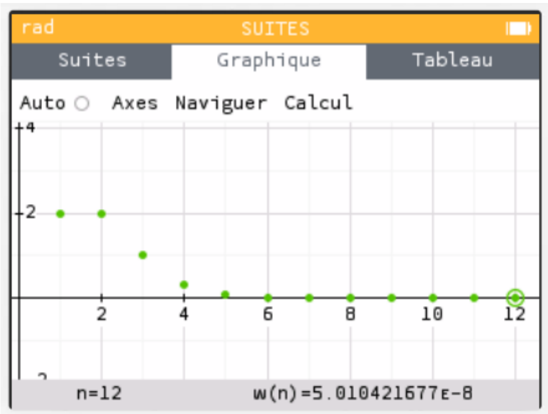
De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} > 0$ et $w_1 > 0$, on pourrait démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n > 0$.
Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = \frac{1}{n} w_n \iff \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow (w_n)$ strictement décroissante

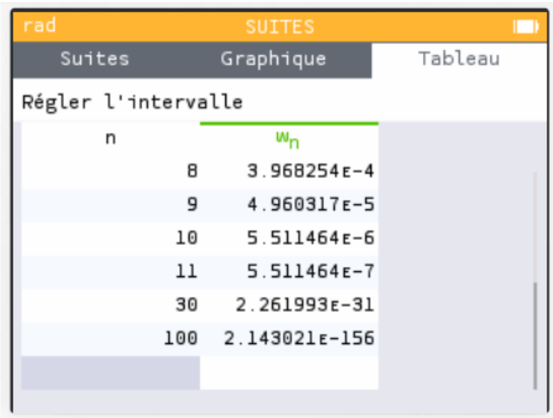
Donc comme (w_n) est décroissante et minorée (par 0), d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge : ceci élimine la réponse B.

Comme il s'agit d'un QCM sans justification, l'élimination des réponses A, B et C suffit à conclure que D est la bonne réponse.

On pourra néanmoins s'en assurer à l'aide de la calculatrice, mais ceci restera une conjecture.







On peut dans un autre contexte (où il faudrait justifier la réponse) démontrer qu'à partir de $n = 5$, on a $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n}$.

Cette démonstration se fait par récurrence (avec une transitivité nécessitant l'étude d'un polynôme du second degré) après avoir conjecturé la propriété à partir des calculs de $w_2, w_3, \dots, w_5, w_6, \dots$

On utilise ensuite le théorème des gendarmes pour conclure sur la limite de (w_n).

Ex 4 :

1) Dans le RON $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$

D'où $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$

Puis $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires $\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \vec{AB}=\lambda\vec{AC}$

$$\iff \begin{cases}4=2\lambda\\1=5\lambda\\4=-6\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=2\\\lambda=\frac{1}{5}\\\lambda=\frac{-2}{3}\end{cases}$$ incompatible

Donc $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \vec{AB}\neq\lambda\vec{AC}$

Ainsi, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

$\iff$ les points $A ; B ; C$ ne sont pas alignés

$\iff$ $\boxed{\text{les points } A ; B ; C \text{ définissent le plan } (ABC) \text{ que l'on notera } \mathcal{P}.}$

2) a) Dans le R.O.N., on a : $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=13\times4+(-16)\times1+(-9)\times4=52-16-36=0 \text{ donc } \vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=13\times2+(-16)\times5+(-9)\times(-6)=26-80+54=0 \text{ donc } \vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, non colinéaires, qui dirigent le plan $\mathcal{P}$. D'où $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix} \text{ est normal à } \mathcal{P}.}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $13x+(-16)\times y+(-9)\cdot z+d=0$ i.e. $13x-16y-9z+d=0$

Or $A\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}\in\mathcal{P}$ donc $13x_A-16y_A-9z_A+d=0$

$\iff 13\times(-1)-16\times(-3)-9\times2+d=0$

$\iff -13+48-18+d=0$

$\iff d=-17$ D'où $\mathcal{P}$: $\boxed{13x-16y-9z-17=0}$

ou $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 13(x+1)+(-16)\times(y+3)+(-9)\times(z-2)=0$

$\Leftrightarrow 13x+13-16y-48-9z+18=0$

$\Leftrightarrow 13x-16y-9z-17=0$

3) $\begin{cases}\mathcal{D}\perp\mathcal{P}\\ \vec{n} \text{ normal à } \mathcal{P}\end{cases} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

De plus, $F\begin{pmatrix}15\\-16\\-8\end{pmatrix}\in\mathcal{D}$, d'où $\boxed{\mathcal{D}:\begin{cases}x=15+13t\\y=-16-16t\\z=-8-9t\end{cases}, t\in\mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

4) $\mathcal{D}\cap\mathcal{P}: \begin{cases}13x-16y-9z-17=0\\x=15+13t\\y=-16-16t\\z=-8-9t\end{cases}$

$\Rightarrow 13(15+13t)-16(-16-16t)-9(-8-9t)-17=0$

$\Rightarrow 195+169t+256+256t+72+81t-17=0$

$\Rightarrow 506t+506=0$

$\Rightarrow t=-1$

D'où $\begin{cases}x_E=15+13t_E=15+13\times(-1)=2\\y_E=-16-16t_E=-16-16\times(-1)=0\\z_E=-8-9t_E=-8-9\times(-1)=1\end{cases}$ D'où $\boxed{\mathcal{D}\cap\mathcal{P}=\left\{E\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$

<u>Rem:</u> On pourrait aussi s'assurer que $E\in\mathcal{D}$ et $E\in\mathcal{P}$ en vérifiant les coordonnées avec l'éq. cartésienne de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

5) On a : $\begin{cases}\mathcal{D}\perp\mathcal{P}\\\mathcal{D}\cap\mathcal{P}=\{E\}\\F\in\mathcal{D}\end{cases} \Rightarrow$ E est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{P}$

Donc $\text{dist}(F;\mathcal{P})=EF$, avec $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$

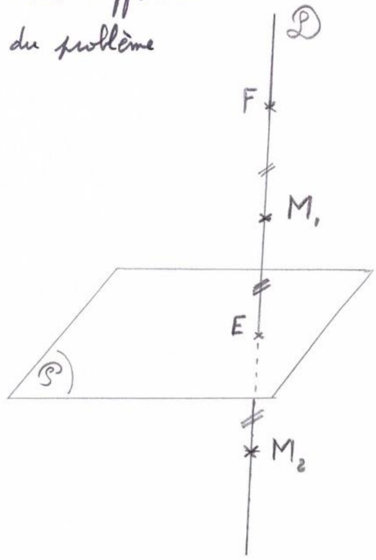
D'où $\text{dist}(F;\mathcal{P})=EF=\|\overrightarrow{EF}\|=\sqrt{\overrightarrow{EF}^2}=\sqrt{13^2+(-16)^2+(-9)^2}=\sqrt{169+256+81}$

i.e. $\boxed{\text{dist}(F;\mathcal{P})=\sqrt{506}\ \text{u.l.}}$

6) On peut aborder cette question de deux manières différentes :

→ De façon intuitive basée sur une visualisation du problème

→ De façon purement calculatoire.



* De façon intuitive :

On observe sur le schéma ci-contre qu'il existe deux points que nous notons M_1 et M_2 qui sont sur $\mathcal{D}$ et à une distance égale à $\frac{1}{2}$ EF du plan $\mathcal{P}$ (i.e. du point E).

Tout d'abord, on a : $\overrightarrow{EM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

$\Leftrightarrow$ M_1 est le milieu de $[EF]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \frac{1}{2}(x_E + x_F) = \frac{1}{2}(2+15) = \frac{17}{2} = 8,5 \\ y_{M_1} = \frac{1}{2}(y_E + y_F) = \frac{1}{2}(0-16) = -8 \\ z_{M_1} = \frac{1}{2}(z_E + z_F) = \frac{1}{2}(1-8) = -\frac{7}{2} = -3,5 \end{cases}$$

Puis on a : $\overrightarrow{EM_2} = -\overrightarrow{EM_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_2} - x_E = -(x_{M_1} - x_E) \\ y_{M_2} - y_E = -(y_{M_1} - y_E) \\ z_{M_2} - z_E = -(z_{M_1} - z_E) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_2} = 2x_E - x_{M_1} = 2\times 2 - 8,5 = 4 - 8,5 = -4,5 \\ y_{M_2} = 2y_E - y_{M_1} = 2\times 0 - (-8) = 0 + 8 = 8 \\ z_{M_2} = 2z_E - z_{M_1} = 2\times 1 - (-3,5) = 2 + 3,5 = 5,5 \end{cases}$$

Conclusion : les points recherchés sont : $\boxed{M_1\begin{pmatrix} 8,5 \\ -8 \\ -3,5 \end{pmatrix} \text{ et } M_2\begin{pmatrix} -4,5 \\ 8 \\ 5,5 \end{pmatrix}}$

Rem : On peut vérifier que E est le milieu de $[M_1M_2]$

* <u>De façon calculatoire :</u>

Soit $t \in \mathbb{R}$, on veut $M_t \in \mathcal{D}$ tq $EM_t = \frac{1}{2} EF$

Or $EM_t = \frac{1}{2} EF \iff EM_t^2 = \left(\frac{1}{2} EF\right)^2$ car $EM_t \geqslant 0$ et $EF \geqslant 0$

$$\iff \overrightarrow{EM_t}^2 = \frac{1}{4} EF^2$$

$$\iff (x_t - x_E)^2 + (y_t - y_E)^2 + (z_t - z_E)^2 = \frac{1}{4} \times \sqrt{506}^2$$

$$\iff (15+13t-2)^2 + (-16-16t-0)^2 + (-8-9t-1)^2 = \frac{506}{4} \quad \text{car } M_t \in \mathcal{D} \text{ et } E\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff (13+13t)^2 + (-16-16t)^2 + (-9-9t)^2 = \frac{253}{2}$$

$$\iff 13^2 \times (1+t)^2 + (-16)^2 \times (1+t)^2 + (-9)^2 (1+t)^2 = \frac{253}{2}$$

$$\iff (169+256+81) \times (1+t)^2 = \frac{253}{2}$$

$$\iff 506 \times (1+t)^2 = \frac{253}{2}$$

$$\iff (1+t)^2 = \frac{\cancel{253}^{\,1}}{2 \times \cancel{506}_{\,2}}$$

$$\iff (1+t)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff 1+t = \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \text{ou} \quad 1+t = -\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\iff 1+t = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 1+t = -\frac{1}{2}$$

$$\iff t = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad t = -\frac{3}{2}$$

Les points recherchés sont donc les points de $\mathcal{D}$ de paramètres $t_1 = \frac{-1}{2}$ et $t_2 = -\frac{3}{2}$, que nous nommons respectivement M_1 et M_2.

$$\begin{cases} x_{M_1} = 15+13t_1 = 15+13\times\frac{-1}{2} = 15-6{,}5 = 8{,}5 \\ y_{M_1} = -16-16t_1 = -16-16\times\frac{-1}{2} = -16+8 = -8 \\ z_{M_1} = -8-9t_1 = -8-9\times\frac{-1}{2} = -8+4{,}5 = -3{,}5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{M_2} = 15+13t_2 = 15+13\times\frac{-3}{2} = 15-19{,}5 = -4{,}5 \\ y_{M_2} = -16-16t_2 = -16-16\times\frac{-3}{2} = -16+24 = 8 \\ z_{M_2} = -8-9t_2 = -8-9\times\frac{-3}{2} = -8+13{,}5 = 5{,}5 \end{cases}$$

D'où les points recherchés sont : $\boxed{M_1\begin{pmatrix}8{,}5\\-8\\-3{,}5\end{pmatrix} \text{ et } M_2\begin{pmatrix}-4{,}5\\8\\5{,}5\end{pmatrix}}$