Ex1 :

$\boxed{1)\ B}$

Il suffit de dériver toutes les fonctions proposées l'une après l'autre.

$F_A'(x) = x e^x + \frac{x^2}{2} e^x = x\left(1 + \frac{x}{2}\right) e^x \neq f(x)$

$F_B'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = x e^x = f(x)$ $\Rightarrow$ Réponse B

$\boxed{2)\ D}$

Conseil : Résumer la situation avec un tableau

x	0		1		3		5		$+\infty$
signe f		$-$	0			$+$			
variations f		$\nearrow$				$\searrow$			
signe f'			$+$		0		$-$		
convexité f			Concave					Convexe	
signe f''			$-$				0	$+$	

$\boxed{3)\ D}$

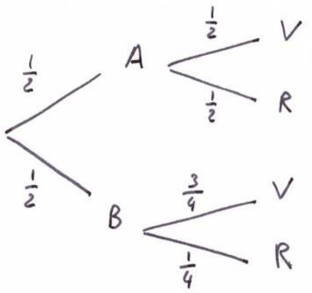
$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \quad g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$ d'où $g(0) = 2 \iff \frac{a}{b+1} = 2$

De plus, $\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 3 \iff \frac{a}{b} = 3$

Puis $\begin{cases} a = 2(b+1) \text{ et } b \neq -1 \\ a = 3b \text{ et } b \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3b = 2b+2 \text{ et } b \neq -1 \\ a = 3b \text{ et } b \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases}$

D'où réponse D

$\boxed{4)\ C}$



Dans l'urne A, il y a 2V et 2R, donc on a $P_A(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Dans l'urne B, il y a 3V et 1R, donc on a $P_B(V) = \frac{3}{4}$

Comme $\{A ; B\}$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(A \cap V) + P(B \cap V) \\ &= P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Puis $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{3}{5}$ $\Rightarrow$ Réponse C

$\boxed{5)\ B}$

Il faut initialiser la somme S à 0 et utiliser une boucle "for", ce qui élimine les scripts C et D.

Puis dans la boucle, il faut rajouter à chaque fois un terme à la somme précédente, donc $S = S + 1/(k+1)$ $\Rightarrow$ Réponse B

Ex 2 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\quad \forall x \in \left]-1,5\,;+\infty\right[\,,\quad g(x) = f(x) - x$

$$\text{et } f(x) = \ln(2x+3) - 1$$

1) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1,5^+} 2x+3 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ par composition, $\lim\limits_{x \to -1,5^+} \ln(2x+3) = -\infty$

Puis par opérations sur les limites, on obtient $\lim\limits_{x \to -1,5^+} f(x) = -\infty$

et enfin $\boxed{\lim\limits_{x \to -1,5^+} g(x) = -\infty}$

On admet dans l'énoncé que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2) La fonction g est dérivable sur $\left]-1,5\,;+\infty\right[$ en tant que composée d'une fonction dérivable et strictement positive sur $\left]-1,5\,;+\infty\right[$ par la fonction logarithme népérien, puis par différence de fonctions dérivable sur cet intervalle.

$\forall x \in \left]-1,5\,;+\infty\right[\,,\quad g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2}{2x+3} + 0 - 1 = \dfrac{2-(2x+3)}{2x+3} = \dfrac{-2x-1}{2x+3}$

Soit $x \in \left]-1,5\,;+\infty\right[\,,\quad -2x-1 \geqslant 0 \iff 2x \leqslant -1 \iff x \leqslant -\frac{1}{2}$

x	$-1,5$		$-0,5$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	
$2x+3$	0		$+$		
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$g(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	$-\infty$

3) ⓐ g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u> sur $]-0{,}5\,;+\infty[$

On a $g(-0{,}5) = \ln\left(2\times\frac{-1}{2}+3\right)-1-(-0{,}5) = \ln(2)-\frac{1}{2} \simeq 0{,}19 > 0$

et on admet dans l'énoncé que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Ainsi, $0 \in \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,;\, g(-0{,}5)\right[= g\left(]-0{,}5\,;+\infty[\right)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]-0{,}5\,;+\infty[}$

ⓑ On procède par balayage avec la calculatrice :

$g(-0{,}5) > 0$ et $g(1) < 0$ donc $\alpha \in]-0{,}5\,;1[$

puis $g(0{,}2) > 0$ et $g(0{,}3) < 0$ donc $\alpha \in]0{,}2\,;0{,}3[$

puis $g(0{,}25) > 0$ et $g(0{,}26) < 0$ donc $\boxed{\alpha \in]0{,}25\,;0{,}26[}$

=> <u>Partie B</u> :

1) On admet que f est strictement croissante sur $]-1{,}5\,;+\infty[$

De plus, comme $[-1\,;\alpha] \subset]-1{,}5\,;+\infty[$, on a :

$$-1 \leqslant x \leqslant \alpha \implies f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$$

$$\implies -1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha \quad (*)$$

$(*)$ car $\begin{cases} f(-1) = \ln(2\times(-1)+3)-1 = \ln(1)-1 = 0-1 = -1 \\ f(\alpha) = g(\alpha)+\alpha = 0+\alpha = \alpha \quad (\text{cf A.3.a}) \end{cases}$

D'où $\boxed{x \in [-1\,;\alpha] \implies f(x) \in [-1\,;\alpha]}$

On dit que l'intervalle $[-1\,;\alpha]$ est stable par f.

2) a) Soit (u_n) : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 0$

et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(2\times 0+3)-1 = \ln(3)-1 \simeq 0{,}0986$

On a bien $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ car $\alpha \in]0{,}25\,;0{,}26[$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

et montrons que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$

On a (HR) : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

$\Rightarrow f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ par stricte croissance de f sur $]-1{,}5\,;+\infty[$, et donc sur $[-1\,;\alpha]$

$\Rightarrow -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ cf B.1

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha}$

b) D'après la question précédente :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha & \Rightarrow (u_n) \text{ majorée (par } \alpha) \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \leqslant \alpha$ (on a même $l \in [-1\,;\alpha]$)

Ex 3 :

1) ⓐ Dans le R.O.N. $(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a $\boxed{H\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} ; \quad M\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } N\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}}$

ⓑ (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et passe par $M\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où

$$\boxed{(HM) : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}}$$

ou $(HM) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

en prenant $H\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \in (HM)$

2) * Vérifions d'abord si $P\begin{pmatrix}2\\2/3\\4/3\end{pmatrix} \in (HM)$

$$\begin{cases} x_P = 3 + 3t \\ y_P = -2t \\ z_P = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t = 2 - 3 \\ -2t = \frac{2}{3} \\ t = 1 - \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{3} \\ t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{-1}{3}$$

Donc P est le point de (HM) de paramètre $-\frac{1}{3}$

* Puis le plan (BCF) a pour équation cartésienne $x = 2$

En effet, $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est normal à (BCF) qui a donc une équation de la forme $x + d = 0$, et $B\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \in (BCF)$ d'où $d = -2$

Finalement (BCF) a pour équation cartésienne $x - 2 = 0$ i.e. $x = 2$

Comme $x_P = 2$, on a $P \in (BCF)$

* Ainsi, $\begin{cases} P \in (HM) \\ P \in (BCF) \end{cases} \Rightarrow \boxed{P \in (HM) \cap (BCF)}$

De plus, $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{\imath} = 3 \times 1 + (-2) \times 0 + (-1) \times 0 = 3 \neq 0$ donc $(HM) \not\subset (BCF)$

D'où $\boxed{(HM) \cap (BCF) = \{P\}}$

Rem : On pouvait aussi utiliser un système pour déterminer l'intersection de (HM) et (BCF)

3) ⓐ Dans le R.O.N., on a $P\begin{pmatrix}2\\2/3\\4/3\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}1\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}1\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN} = 1\times1 + \frac{-2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{-1}{3}\times\frac{-1}{3} = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$

ⓑ $PM = \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{\overrightarrow{PM}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{3}}$ u.l.

on admet que $PN = \frac{\sqrt{11}}{3}$ u.l.

ⓒ On a : $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN} = \frac{8}{9}$

$\iff PM \times PN \times \cos(\widehat{MPN}) = \frac{8}{9}$

$\iff \cos\widehat{MPN} = \dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{\sqrt{11}}{3}\times\frac{\sqrt{14}}{3}} = \frac{8}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{\sqrt{154}} = \frac{8}{\sqrt{154}}$

D'où $\widehat{MPN} = \cos^{-1}\frac{8}{\sqrt{154}} \simeq 49{,}9° < 55°$

Donc $\boxed{\text{le toit pourra être construit}}$

⚠ conserver la valeur exacte dans un calcul intermédiaire
⊕ Vérifier calculatrice en degrés

4) Pour rappel, on a : $(HM) : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Puis on a $E\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ dirige (EN) avec $E\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \in (EN)$

D'où $(EN) : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

⚠ Il faut absolument que (HM) et (EN) aient des paramètres nommés différemment.

Puis $(HM) \cap (EN)$: $\begin{cases} 3+3t = 3\lambda \\ -2t = \lambda \\ 1-t = 2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+3t = 3\times(-2t) \\ \lambda = -2t \\ \lambda = t+1 \end{cases}$ par substitution

$\Rightarrow \begin{cases} 3+3t = -6t \\ \lambda = -2t \\ \lambda = t+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 9t = -3 \\ \lambda = -2t \\ \lambda = t+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ \lambda = -2\times\frac{-1}{3} = \frac{2}{3} \\ \lambda = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3} \end{cases}$ compatibles

Ainsi, $\boxed{\text{(HM) et (EN) sont sécantes en P}}$ puisque nous avons vu dans la question 2) que P est le point de (HM) de paramètre $t_P = \frac{-1}{3}$.

Si on ne le voyait pas directement, on pouvait dire que que $(HM)\cap(EN) = \{I\}$ tel que I est le point de (EN) de paramètre $\lambda_I = \frac{2}{3}$

D'où I: $\begin{cases} x_I = 3\lambda_I = 3\times\frac{2}{3} = 2 \\ y_I = \lambda_I = \frac{2}{3} \\ z_I = 2-\lambda_I = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$ d'où $I\begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ puis $I = P$

Ex 4 :

* Notons X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de candidats qui se qualifient pour la deuxième phase.

On répète $n = 4$ fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à $p = 0,6$

D'où $X \sim \mathcal{B}(4\,;\,0,6)$

La 2^e phase n'a lieu que si au moins 2 candidats se qualifient.

D'où on calcule : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$

fct de répartition avec la calculatrice

$= 1 - 0,1792$

⚠ Valeurs exactes

$= 0,8208$

On a $P(X \geqslant 2) > 0,8$ donc $\boxed{\text{la condition n°1 est vérifiée.}}$

* Notons Y la variable aléatoire qui comptabilise la durée de la deuxième phase.

Etablissons sa loi de probabilité. On a : $Y(\Omega) = \{0\,;\,5\,;\,9\,;\,11\}$

Puis $P(Y=0) = P(X \leqslant 1) = 0,1792$

$P(Y=5) = P(X=2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 6 \times 0,36 \times 0,16 = 0,3456$

$P(Y=9) = P(X=3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4^1 = 4 \times 0,216 \times 0,4 = 0,3456$

$P(Y=11) = P(X=4) = \binom{4}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^0 = 1 \times 0,1296 \times 1 = 0,1296$

D'où la loi de probabilité de Y :

y_i	0	5	9	11
$P(Y=y_i)$	0,1792	0,3456	0,3456	0,1296

Puis $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} \left(y_i \times P(Y = y_i) \right)$

$= 0 \times 0,1792 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296$

$= 6,264 > 6$

On a $E(Y) > 6$ minutes donc $\boxed{\text{la condition n° 2 n'est pas vérifiée.}}$

Ainsi, $\boxed{\text{le jeu ne peut pas être retenu.}}$