Ex1 :

$\boxed{1)\ C}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est une F.I. du type $\frac{\infty}{\infty}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n} = \frac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+1\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{5^n}+1}$$

$$\text{On a } \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 & \text{car } \frac{2}{5} \in]-1;1[\\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5^n} = 0 \end{cases}$$

Par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \times \frac{0+1}{0+1} = 0 \times 1 = 0$

$\boxed{2)\ B}$

La fct $f : x \longmapsto x^2 \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x.\ln(x) + x = x\left(2\ln(x)+1\right)$$

$\boxed{3)\ A}$

$$\text{On déduit du tableau de variations que : } \begin{cases} h(x) < 0 & \text{sur }]-\infty;1[\\ h(x) = 0 & \text{pour } x = 1 \\ h(x) > 0 & \text{sur }]1;+\infty[\end{cases}$$

Ainsi, H est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$

ceci élimine les réponses C et D

De plus, on sait que $H(0) = 0$ donc on a :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$H(x)$		↘	0	↘	$H(1)$	↗	
$H(x)$		$+$	0	$-$		?	

=> Réponse A

$\boxed{4)\ D}$

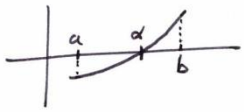
Il s'agit de l'algorithme de dichotomie vu en cours.

On veut $|b-a| < 0{,}001$ donc la condition du while est $|b-a| \geqslant 0{,}001$

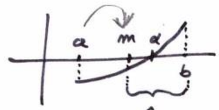
ceci élimine la réponse C

De plus, l'instruction $m = (a+b)/2$ doit être à l'intérieur de la boucle "while", ce qui exclut aussi la réponse B

Enfin, l'énoncé précise que la fonction est strictement <u>croissante</u>, donc on est dans le cas de figure suivant :



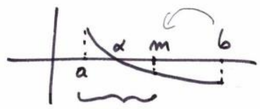
si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors on a :



et la boucle suivante doit se focaliser sur

D'où $f(m) < 0 \Rightarrow a = m$ $\Rightarrow$ Réponse D

Rem:
Pour information, si f avait été strictement décroissante, on aurait eu le cas de figure suivant:



et l'étape suivante aurait nécessité de se focaliser sur , impliquant alors la réponse A.

$\boxed{5)\ D}$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nb de succès "obtenir une boule verte".

D'où $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$ avec $n = 3$ et $p = \frac{10-7}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Puis $P(X=2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times (1-p)^{3-2} = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)$

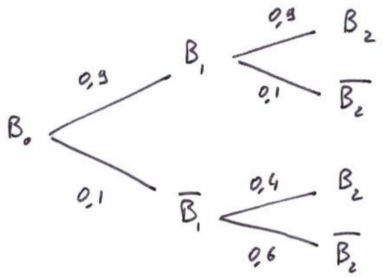
Ex 2 :

⇒ Partie A :

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} P_{B_n}(B_{n+1}) = 0{,}9 \\ P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0{,}4 \end{cases}$ et on note $p_n = P(B_n)$

D'où $p_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) = p_0 \times 0{,}9 = 1 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}9}$

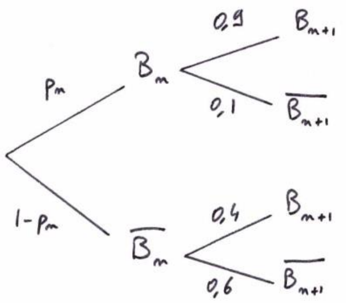
Puis :



$\{B_1 ; \overline{B_1}\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_2 = P(B_2) &= P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}81 + 0{,}04 \\ &= \boxed{0{,}85} \end{aligned}$$

2)



$\{B_n ; \overline{B_n}\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(B_n \cap B_{n+1}) + P(\overline{B_n} \cap B_{n+1}) \\ &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times 0{,}9 + (1-p_n) \times 0{,}4 \\ &= 0{,}9\, p_n + 0{,}4 - 0{,}4\, p_n \\ &= \boxed{0{,}5\, p_n + 0{,}4} \end{aligned}$$

4) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geqslant 0{,}8$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $p_0 = 1 \geqslant 0{,}8 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $p_n \geqslant 0{,}8$ et montrons que $p_{n+1} \geqslant 0{,}8$

D'après (HR), on a $p_n \geqslant 0{,}8 \Rightarrow 0{,}5\,p_n \geqslant 0{,}5 \times 0{,}8$

$\Rightarrow 0{,}5\,p_n + 0{,}4 \geqslant 0{,}4 + 0{,}4$

$\Rightarrow p_{n+1} \geqslant 0{,}8 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geqslant 0{,}8}$

ⓑ L'entreprise peut communiquer sur le fait qu'au moins 80% de ses trottinettes sont toujours en bon état.

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p_n - 0{,}8$

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5\,p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5\,p_n - 0{,}4 = \frac{1}{2}(p_n - 0{,}8) = \frac{1}{2} u_n$

Donc (u_n) est $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ et de premier terme $u_0 = p_0 - 0{,}8 = 1 - 0{,}8 = \boxed{0{,}2}$

ⓑ On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 0{,}2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ i.e $\boxed{u_n = 0{,}2 \times 0{,}5^n}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p_n - 0{,}8 \iff p_n = u_n + 0{,}8 = \boxed{0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}8}$

ⓒ On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0^+$ car $0{,}5 \in\ ]0\,;1[$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}8 = 0{,}2 \times 0 + 0{,}8 = \boxed{0{,}8}$

=> Partie B :

1) On répète $n = 15$ fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès " la trottinette est en bon état " est $p_n = 0,8$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(15\,;\,0,8)}$

2) $P(X = 15) = \binom{15}{15} \times p^{15} \times (1-p)^{15-15} = 1 \times 0,8^{15} \times 1 = \boxed{0,8^{15}}$

3) $\boxed{P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9)}$

L'énoncé ne précisant pas de consigne pour les arrondis, on suppose qu'il faut donner la valeur exacte. Néanmoins, il semble nécessaire ici de prendre l'initiative de donner une valeur approchée (en précisant notre arrondi).

On utilise la fonction de répartition de la calculatrice :

$P(X \geqslant 10) = 1 - (P\,X \leqslant 9)$ $\boxed{\simeq 0,9389 \text{ (à } 10^{-4} \text{ près)}}$

Ici, un arrondi à 10^{-3} ou 10^{-4} près était idéal.

4) On aurait pu faire nous-mêmes $E(X) = n \times p = 15 \times 0,8 = \cancel{15}^{3} \times \frac{4}{\cancel{5}_{1}} = 12$

$\boxed{\text{En moyenne, sur un lot de 15 trottinettes, 12 seront en bon état.}}$

Ex 3 :

1) Dans le RON $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$

Puis I milieu de $[EF]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ z_I = \dfrac{z_E + z_F}{2} = \dfrac{8+4}{2} = 6 \end{cases}$ d'où $\boxed{I\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}}$

De même, on obtient $\boxed{J\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}$

2) a) On a $I\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JG}\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N., avec $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = -1\times(-2) + 1\times 0 + 1\times(-2) = 2+0-2 = 0 \quad \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{IJ} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{JG} = -1\times 4 + 1\times 4 + 1\times 0 = -4+4+0 = 0 \quad \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{JG} \end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JG}$ non colinéaires (position du 0 dans les coordonnées) qui dirigent le plan (IGJ). Donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est normal à } (IGJ)}$

b) Ainsi (IGJ) a une équation cartésienne de la forme $-x+y+z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

Or $J\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \in (IGJ) \Leftrightarrow -x_J + y_J + z_J + d = 0 \Leftrightarrow -0+0+4+d=0 \Leftrightarrow d=-4$

D'où (IGJ) : $\boxed{-x+y+z-4=0}$

3) $d \perp (IGJ)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal à (IGJ) dirige d. De plus, $H\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}\in d$

D'où $\boxed{d : \begin{cases} x = -t \\ y = 4+t \\ z = 8+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

4) On peut retrouver les coordonnées de L avec l'intersection de d et (IGJ) via une résolution de système, ou simplement en s'assurant que les coordonnées de L données dans l'énoncé vérifient l'équation cartésienne de (IGJ) et la représentation paramétrique de d que nous avons trouvées dans les questions précédentes.

$$-x_L + y_L + z_L - 4 = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = 0 \quad \text{donc } L\begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix} \in (IGJ)$$

$$\begin{cases} x_L = -t \\ y_L = t+4 \\ z_L = t+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = \frac{8}{3} \\ t = -4 + \frac{4}{3} \\ t = -8 + \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{8}{3} \\ t = -\frac{12}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{8}{3} \\ t = -\frac{24}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Donc $L\begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix}$ est le point de d de paramètre $t = \frac{-8}{3}$

Ainsi $\boxed{\begin{cases} L \in d \\ L \in (IGJ) \\ d \perp (IGJ) \\ H \in d \end{cases} \Rightarrow L\begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de } H \text{ sur } (IGJ)}$

5) D'après la question précédente, on a : $\text{dist}(H, (IGJ)) = HL$ avec $\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix} 8/3 \\ -8/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N :

$$\text{dist}(H, (IGJ)) = HL = \|\overrightarrow{HL}\| = \sqrt{\overrightarrow{HL}^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} \times 3} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{3}} \text{ u.l.}$$

6) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IG} = -2 \times 2 + 0 \times 4 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$ donc $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{IG}$

Ainsi $\boxed{\text{le triangle } IGJ \text{ est rectangle en } I}$

7) On choisit comme base le triangle IGJ rectangle en I, et pour hauteur correspondante (HL) issue de H.

On a $IG = \|\overrightarrow{IG}\| = \sqrt{\overrightarrow{IG}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ u.l.

et $IJ = \|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{\overrightarrow{IJ}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u.l.

Puis $\mathcal{A}_{IGJ} = \frac{1}{2} \cdot IG \times IJ = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ u.a.

Et enfin $\mathcal{V}_{IGJH} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{IGJ} \times HL$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \times 4\cancel{\sqrt{3}} \times \frac{8\cancel{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \boxed{\frac{32}{3}} \text{ u.v.}$$

Ex4 :

Affirmation 1 : $\boxed{\text{Fausse}}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (il s'agit d'une restriction, donc ⚠ pour la suite de l'exercice)

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = 0 - (-0{,}5 \times 2 \times t + 1)\, e^{-0{,}5t^2+t+2} = (t-1)\, e^{-0{,}5t^2+t+2}$

Comme $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-0{,}5t^2+t+2} > 0$, f' est du signe de $t-1$ sur $\mathbb{R}_+$

t	0		1		$+\infty$
$t-1$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

Ainsi, f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+$ donc l'affirmation 1 est fausse

Affirmation 2 : $\boxed{\text{Fausse}}$

f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, puis

$\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}5t^2+t+2 = \lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}5t^2 = -\infty$ car une fct polynôme se comporte au voisinage de $\pm\infty$ comme son monôme de plus haut degré

Puis $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0^+$

Donc par opérations sur les limites (composition puis somme) :

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} e^3 - e^{-0{,}5t^2+t+2} = e^3 - 0^+ = e^3 < 21$ car $e^3 \simeq 20{,}086$

D'après la modélisation, il y aura environ 20 086 bactéries (au maximum) à très long terme.

Affirmation 3 : $\boxed{\text{Vraie}}$

Il faut procéder pour disjonction de cas.

* Sur $[0;1]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante

On a $f(0) = e^3 - e^2 \simeq 12,7 > 10$

et $f(1) = e^3 - e^{2,5} \simeq 7,9 < 10$ ⚠ Inversion des bornes

Ainsi, $10 \in [f(1); f(0)] = f([0;1])$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur $[0;1]$

* Sur $]1; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante

On a $f(1) = e^3 - e^{2,5} < 10$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = e^3 > 10$

Ainsi, $10 \in]f(1); \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)[= f(]1; +\infty[)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur $]1; +\infty[$

* **Conclusion :** Nous venons de démontrer par disjonction (exhaustive) de cas que l'équation $f(t) = 10$ admet exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}_+$