Ex 1 :

⇒ Partie A : Soit (u_n) : $u_0 = 400$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 60$

1) a) $u_1 = 0,9 \times u_0 + 60 = 0,9 \times 400 + 60 = 9 \times 40 + 60 = 360 + 60 = 420$

$u_2 = 0,9 \times u_1 + 60 = 0,9 \times 420 + 60 = 9 \times 42 + 60 = 378 + 60 = 438$

b) On a $u_0 < u_1 < u_2$ donc $\boxed{\text{il semble que } (u_n) \text{ soit strictement croissante.}}$

2) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$

Initialisation : Pour $n=0$, $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 600$ car $\begin{cases} u_0 = 400 \\ u_1 = 420 \end{cases}$

⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$

et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 600$

On a (HR) : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$

$\Rightarrow 0 \times 0,9 \leqslant 0,9 \times u_n \leqslant 0,9 \times u_{n+1} \leqslant 0,9 \times 600$

$\Rightarrow 0 + 60 \leqslant 0,9 \times u_n + 60 \leqslant 0,9 \times u_{n+1} + 60 \leqslant 540 + 60$

$\Rightarrow 60 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 600$

par transitivité

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 600$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600}$$

3) ⓐ D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante} \\ u_n \leqslant 600 & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge vers un réel $l \in [0 ; 600]$

ⓑ Soit $f : x \longmapsto 0{,}9x + 60$ la fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ associée à la suite (u_n) définie par récurrence par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Comme (u_n) converge (voir question précédente), sa limite l est solution de l'équation $f(l) = l$ d'après le théorème du point fixe.

D'où : $f(l) = l \iff 0{,}9\,l + 60 = l$

$\iff 0{,}1\,l = 60$

$\iff l = 600$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 600}$

4) La fonction "mystere" renvoie le plus petit rang n à partir duquel $u_n >$ seuil, la valeur "seuil" étant saisie en argument.

Ainsi, pour "mystere(500)", on trouve $\boxed{n = 7}$ car $\begin{cases} u_6 \simeq 494 < 500 \\ u_7 \simeq 504 > 500 \end{cases}$

⇒ Partie B :

La situation peut être modélisée par la suite (u_n) de la partie A.

Comme (u_n) est croissante et de limite $600 > 500$, l'arboriculteur va être confronté à un problème de place (à partir de $2023 + 7 = 2030$ d'après A.4).

Ex 2 :

1) Dans le R.O.N. $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $M\begin{pmatrix}1\\1\\3/4\end{pmatrix}$; $N\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix}1\\0\\-5/4\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1/4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}}$

2) Voir figure ci-après (en fin d'exercice)

3) Le vecteur non nul $\overrightarrow{MP}$ a une composante nulle (la 1ère) et pas $\overrightarrow{MN}$, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\text{les points } M ; N \text{ et } P \text{ ne sont pas alignés.}}$

4) a) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$, donc :

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = -1\times 0 + \frac{-1}{2}\times(-1) + \frac{1}{4}\times(-2) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{0}$$

Ainsi, $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MP}$, ce qui implique que $\boxed{\text{le triangle } MNP \text{ est rectangle en } M.}$

b) Comme MNP est rectangle en M, on a : $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{1}{2}\times MN \times MP$

Or $\begin{cases} MN = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4} \text{ u.l.} \\ MP = \|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{\overrightarrow{MP}^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \text{ u.l.} \end{cases}$

D'où $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{1}{2}\times MN \times MP = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{4}\times\sqrt{5} = \boxed{\frac{\sqrt{105}}{8} \text{ u.a.}}$

5) a) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN} = 5\times(-1)+(-8)\times\frac{-1}{2}+4\times\frac{1}{4} = -5+4+1=0 & \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{MN} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MP} = 5\times 0+(-8)\times(-1)+4\times(-2) = 0+8-8=0 & \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{MP} \end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ non colinéaires dirigeant le plan (MNP). Donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix} \text{ est normal à } (MNP)}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ est normal à (MNP), donc (MNP) admet une équation cartésienne de la forme $5x+(-8)y+4z+d=0$, i.e. $5x-8y+4z+d=0$

Or $M\begin{pmatrix}1\\1\\3/4\end{pmatrix}\in(MNP)$ donc $5x_M-8y_M+4z_M+d=0$

$\Leftrightarrow 5\times1-8\times1+4\times\frac{3}{4}+d=0$

$\Leftrightarrow 5-8+3+d=0$

$\Leftrightarrow d=0$

D'où (MNP) : $\boxed{5x-8y+4z=0}$

Rem: Comme $d=0$, l'origine $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ du repère appartient à (MNP)

6) $d\perp(MNP)$ donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ normal à (MNP) est un vecteur directeur de d. De plus, on sait que $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in d$,

Donc $\boxed{d : \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -8t \\ z = 1+4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

7) L est le projeté orthogonal de F sur (MNP)

Comme $F \in d$ et $d \perp (MNP)$, on a donc $d \cap (MNP) = \{L\}$

D'où $L : \begin{cases} 5x - 8y + 4z = 0 \\ x = 1+5t \\ y = -8t \\ z = 1+4t \end{cases}$

$\Rightarrow 5(1+5t) - 8\times(-8t) + 4(1+4t) = 0$

$\Rightarrow 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0$

$\Rightarrow 105t + 9 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{-9}{105} = \frac{-3}{35}$

Puis $\begin{cases} x = 1+5t = 1+\cancel{5}^{1}\times\frac{-3}{\cancel{35}_{7}} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \\ y = -8t = -8\times\frac{-3}{35} = \frac{24}{35} \\ z = 1+4t = 1+4\times\frac{-3}{35} = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35} \end{cases}$

D'où $\boxed{d \cap (MNP) = \left\{ L\begin{pmatrix} 4/7 \\ 24/35 \\ 23/35 \end{pmatrix} \right\}}$

8) Dans le R.O.N., on a $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 4/7 \\ 24/35 \\ 23/35 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -3/7 \\ 24/35 \\ -12/35 \end{pmatrix}$

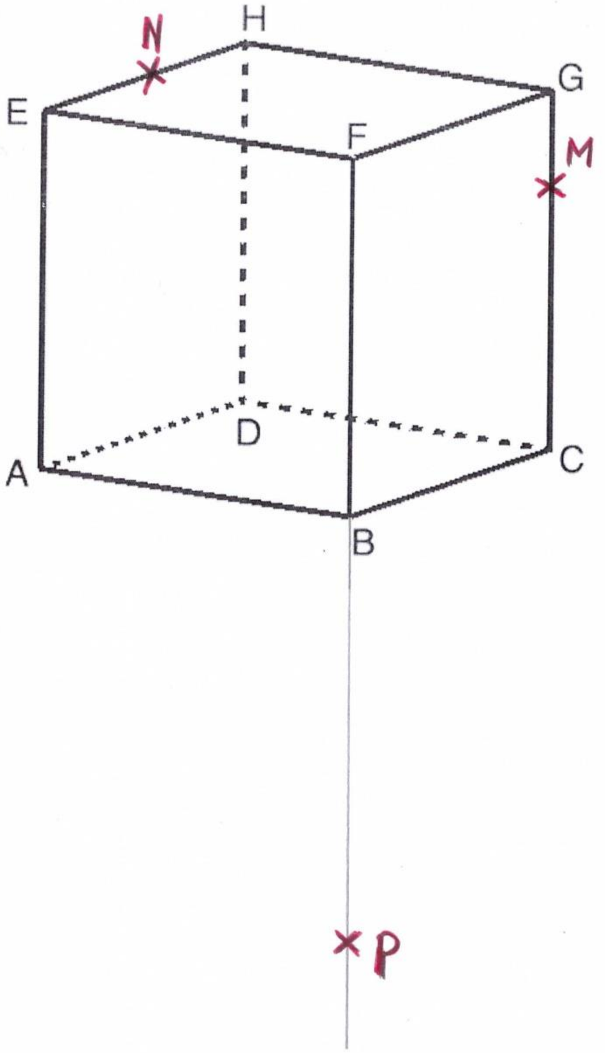
Puis $FL = \|\overrightarrow{FL}\| = \sqrt{\overrightarrow{FL}^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(\frac{-12}{35}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{225 + 576 + 144}{35^2}} = \frac{\sqrt{945}}{35} = \frac{\sqrt{9\times 105}}{35} = \boxed{\frac{3\sqrt{105}}{35} \text{ u.l.}}$

Ensuite, comme L est le projeté orthogonal de F sur (MNP), on en déduit que [FL] est la hauteur issue de F, relative à la base MNP, dans le tétraèdre FMNP.

D'où $V_{FMNP} = \frac{1}{3}\times \mathcal{A}_{MNP} \times FL = \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\sqrt{105}}{8} \times \frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{105}}{35} = \frac{\cancel{105}^{3}}{8\times\cancel{35}_{1}} = \boxed{\frac{3}{8} \text{ u.v.}}$

ANNEXE à rendre avec la copie



Ex 3 :

1) * Pour $k=1$, il semble que l'équation $\ln x = kx$ ne possède $\boxed{\text{aucune solution}}$ car la première bissectrice (d'équation $y=x$) et la courbe représentative du logarithme népérien n'ont aucun point d'intersection.

* Pour $k=0{,}2$, il semble que l'équation $\ln x = kx$ possède $\boxed{2 \text{ solutions}}$, qui sont les abscisses des deux points d'intersection de la courbe représentative du logarithme népérien et de la droite d'équation $y=0{,}2x$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln(x) - x$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Or $1-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	-1	↘	

$f(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$

c) D'après le tableau de variations, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant -1 < 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0 \iff \ln(x) - x < 0 \iff \ln x < x$

Donc l'équation $\ln x = x$ n'admet $\boxed{\text{aucune solution}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \ln(x) - kx$

a) * Si $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) < 0$ car $g\left(\frac{1}{k}\right)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.

* Si $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0$, comme g est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{k}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{k}; +\infty\right[$, la fonction g s'annule une seule fois : en son maximum $x = \frac{1}{k}$

* Si $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, alors on procède par disjonction de cas :

$\Rightarrow$ Sur $\left]0; \frac{1}{k}\right]$, g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u>.

Comme $0 \in \left]-\infty; g\left(\frac{1}{k}\right)\right] = g\left(\left]0; \frac{1}{k}\right]\right)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists!\, \alpha \in \left]0; \frac{1}{k}\right]$, $g(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ Sur $\left]\frac{1}{k}; +\infty\right[$, g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u>

Comme $0 \in \left]-\infty; g\left(\frac{1}{k}\right)\right[= g\left(\left]\frac{1}{k}; +\infty\right[\right)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists!\, \beta \in \left]\frac{1}{k}; +\infty\right[$, $g(\beta) = 0$

$\Rightarrow$ L'équation $g(x) = 0$ admet donc 2 solutions.

* Conclusion :

Si $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0$:	0 solution
Si $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0$:	1 solution
Si $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$:	2 solutions

b) $\forall k > 0,\ g\left(\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k \times \frac{1}{k} = \boxed{-\ln(k) - 1}$

c) Soit $k > 0$, $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff -\ln(k) - 1 > 0 \iff \boxed{\ln k < -1}$

d)

Soit $k > 0$, on a $\ln x = kx \iff \ln(x) - kx = 0$

$\iff g(x) = 0$

Or d'après 3.a, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement 2 solutions si $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, ce qui équivaut d'après 3.c à :

$\ln k < -1 \iff e^{\ln k} < e^{-1}$ (car $x \mapsto e^x$ est strict. croissante sur $\mathbb{R}$)

$\iff k < \frac{1}{e}$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left]0\,;\frac{1}{e}\right[}$

e) Soit $k > 0$, on a : $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \iff -\ln(k) - 1 = 0 \iff \ln k = -1 \iff k = \frac{1}{e}$

et $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0 \iff -\ln(k) - 1 < 0 \iff \ln k > -1 \iff k > \frac{1}{e}$

Donc en utilisant les questions précédentes, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} k \in \left]0\,;\frac{1}{e}\right[\implies \text{l'équation } \ln x = kx \text{ possède 2 solutions} \\ k = \frac{1}{e} \implies \text{l'équation } \ln x = kx \text{ possède 1 solution} \\ k \in \left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[\implies \text{l'équation } \ln x = kx \text{ n'admet pas de solution} \end{cases}}$$

Ex4 :

$\boxed{1)\ B}$

On note I : " le numéro de la bille est impair "

Puis $\text{Card}(B \cup \bar{I}) = \text{Card}(B) + \text{Card}(\bar{I}) - \text{Card}(B \cap \bar{I})$

$= 4 + 7 - 2$

$= 9$

D'où $P(B \cup \bar{I}) = \dfrac{\text{Card}(B \cup \bar{I})}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{9}{15} \left(= \dfrac{3}{5} = 0{,}6\right)$

$\boxed{2)\ C}$

Parmi les 10 billes vertes, une seule a le n° 7

D'où $P_V(\text{"n°7"}) = \dfrac{P(V \cap \text{"n°7"})}{P(V)} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

Rem : On pourrait introduire une variable aléatoire pour éviter l'écriture "n°7"

$\boxed{3)\ B}$

Comme le joueur mise 10 €, l'événement $(G=5)$ est réalisé s'il remporte 15 €. Compte tenu des règles, ceci se produit s'il tire la bille n° 5 (bleue) ou la bille n° 15 (verte). Il y a donc 2 possibilités sur 15. D'où $P(G=5) = \dfrac{2}{15}$

$\boxed{4)\ A}$

Le joueur ne remporte rien s'il tire une bille rouge, et perd sa mise de 10 €.
Sachant que R est réalisé, l'événement $(G=0)$ est impossible, donc $P_R(G=0) = 0$

$\boxed{5)\ C}$

L'événement $(G=-4)$ se réalise si le joueur remporte 6 €. Ceci se produit si le joueur tire la bille n°2 (bleue) ou la bille n°6 (verte).

Ainsi, $\text{Card}\,(G=-4) = 2$

Comme parmi ces 2 possibilités, une seule concerne une bille verte, on a $\text{Card}\,(V \cap (G=-4)) = 1$

D'où $P_{(G=-4)}(V) = \dfrac{P(V \cap (G=-4))}{P(G=-4)} = \dfrac{1}{2}$