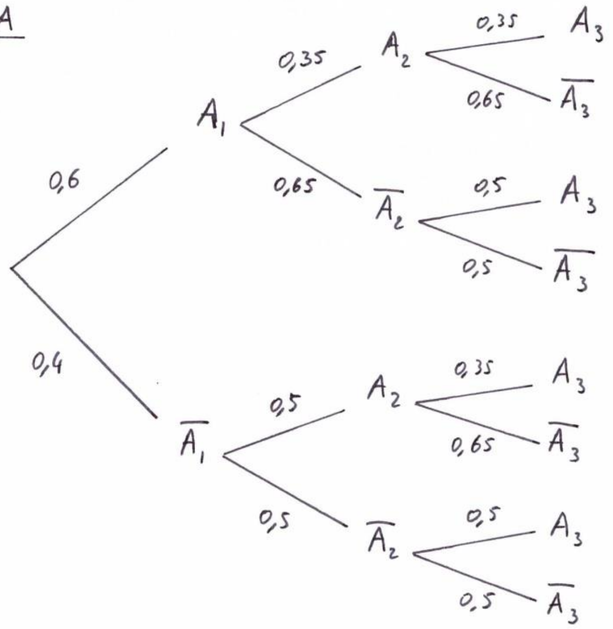
Ex 1 :

⇒ Partie A

1)



2) $P(X=2) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\right)$ événements incompatibles

$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$

$= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(\overline{A_3}) + P(A_1) \times P_{A_1}(\overline{A_2}) \times P_{A_1 \cap \overline{A_2}}(A_3)$

$+ P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) \times P_{\overline{A_1} \cap A_2}(A_3)$

$= 0,6 \times 0,35 \times 0,65 + 0,6 \times 0,65 \times 0,5 + 0,4 \times 0,5 \times 0,35$

$= 0,1365 + 0,195 + 0,07$

$= \boxed{0,4015}$

3) ⓐ On vient de calculer $P(X=2) = 0,4015$

Puis $P(X=1) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=2) + P(X=3)\right)$

$= 1 - (0,1 + 0,4015 + 0,0735)$

$= 1 - 0,575$

$= 0,425$

D'où la loi de probabilité de X :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,425	0,4015	0,0735

b) $E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i \times P(X = x_i) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,425 + 2 \times 0,4015 + 3 \times 0,0735$
$= 0 + 0,425 + 0,803 + 0,2205$
$= \boxed{1,4485}$

c) Si l'expérience est réalisée un très grand nombre de fois, on peut en déduire que : en moyenne, sur 3 tirs, la cible sera atteinte 1,4485 fois.

=> Partie B :

1) a) On répète $N = 15$ fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le joueur atteint 3 fois la cible" est égale à $p = P(X=3) = 0,0735$. Donc Y suit la loi binomiale de paramètres $N = 15$ et $p = 0,0735$. $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(15 ; 0,0735)}$

b) $P(Y=5) = \binom{15}{5} \times 0,0735^5 \times (1-0,0735)^{15-5} \simeq 0,003$ (à 10^{-3} près)

2) Désormais $Y \sim \mathcal{B}(N ; 0,0735)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. On veut

$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,98 \iff 1 - P(Y=0) \geqslant 0,98 \iff \binom{N}{0} \times 0,0735^0 \times (1-0,0735)^{N-0} \leqslant 0,02$

$\iff 1 \times 1 \times 0,9265^N \leqslant 0,02 \overset{\ln \nearrow}{\iff} \ln(0,9265^N) \leqslant \ln 0,02 \iff N \ln 0,9265 \leqslant \ln 0,02$

$\overset{\ln(0,9265)<0}{\iff} N \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9265}$ or $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9265} \simeq 51,2$ et on veut $N \in \mathbb{N}^*$

Il faut donc au minimum $N = 52$ personnes.

Ex 2 :

1) Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Les deuxièmes composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égales, mais pas les deux autres, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés et $\boxed{\text{définissent le plan } (ABC)}$.

OU $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

$$\iff \begin{cases} 1 = -1\times\lambda \\ -2 = -2\times\lambda \\ 1 = 3\times\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ incompatible}$$

2) a) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times1 + 1\times(-2) + 1\times1 = 1-2+1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-1) + 1\times(-2) + 1\times3 = -1-2+3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires qui dirigent (ABC),

donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est normal au plan } (ABC).}$

b) L'équation étant donnée, on peut se contenter de tester si les 3 points A, B et C vérifient avec leurs coordonnées l'équation proposée.

$$\begin{cases} x_A + y_A + z_A + 2 = 1+1+(-4)+2 = 0 \\ x_B + y_B + z_B + 2 = 2+(-1)+(-3)+2 = 0 \\ x_C + y_C + z_C + 2 = 0+(-1)+(-1)+2 = 0 \end{cases}$$

Donc on a bien : $\boxed{(ABC) \text{ a pour équation cartésienne } x+y+z+2=0}$

3) ⓐ Soit $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, on a : $x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 2 = 1+1+2+2 = 6 \neq 0$

Donc $\boxed{\Omega\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \notin (ABC)}$

ⓑ H est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC), donc :

* $H\begin{pmatrix}x_H\\y_H\\z_H\end{pmatrix} \in (ABC) \iff x_H + y_H + z_H + 2 = 0$

* $\overrightarrow{\Omega H}\begin{pmatrix}x_H-1\\y_H-1\\z_H-2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal à (ABC)

$\iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\Omega H} = t \times \vec{n} \iff \begin{cases} x_H - 1 = 1 \times t_H \\ y_H - 1 = 1 \times t_H \\ z_H - 2 = 1 \times t_H \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 1 + t_H \\ y_H = 1 + t_H \\ z_H = 2 + t_H \end{cases}$

On a ainsi $x_H + y_H + z_H + 2 = 0 \iff 1+t_H + 1+t_H + 2+t_H + 2 = 0$

$\iff 3t_H + 6 = 0$

$\iff t_H = -2$

Puis $\begin{cases} x_H = 1+t_H = 1+(-2) = -1 \\ y_H = 1+t_H = -1 \\ z_H = 2+t_H = 2+(-2) = 0 \end{cases}$ i.e. $\boxed{H\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}}$

4) H est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC), donc la distance de Ω au plan (ABC) vaut $\Omega H = 2\sqrt{3}$ (donné dans l'énoncé).

Ceci signifie que ΩH est la plus courte distance de Ω à tout point N du plan (ABC).

Ainsi, $\forall N \in (ABC) \setminus \{H\}$, $\Omega N > 2\sqrt{3}$

Comme S est la sphère de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$, tout point M de la sphère vérifie $\Omega M = 2\sqrt{3}$. On aura donc toujours $\Omega N > \Omega M$, ce qui se traduit par $\boxed{N \notin S}$

5) Soient $\mathcal{P} : x+y-z-6=0$ et $K\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\Omega K}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

* On a $x_K + y_K - z_K - 6 = 3+3-0-6 = 0$ donc $K \in \mathcal{P}$

et $\Omega K = \|\overrightarrow{\Omega K}\| = \sqrt{\overrightarrow{\Omega K}^2} = \sqrt{2^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{3\times 2^2} = \sqrt{3}\times\sqrt{2^2} = 2\sqrt{3}$

donc $K \in S$

Ainsi $K \in \mathcal{P} \cap S$ $\Rightarrow$ la première condition est vérifiée.

* Par ailleurs, notons $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, obtenu à partir de l'équation cartésienne proposée. On remarque que $\overrightarrow{\Omega K} = 2\vec{u}$

Ainsi $\overrightarrow{\Omega K}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{P}$, d'où $(\Omega K) \perp \mathcal{P}$.

$\Rightarrow$ la seconde condition est vérifiée.

* On en conclut donc que $\boxed{\mathcal{P} \text{ est tangent à la sphère } S \text{ au point } K.}$

6) $(ABC) \cap \mathcal{P}$: $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$

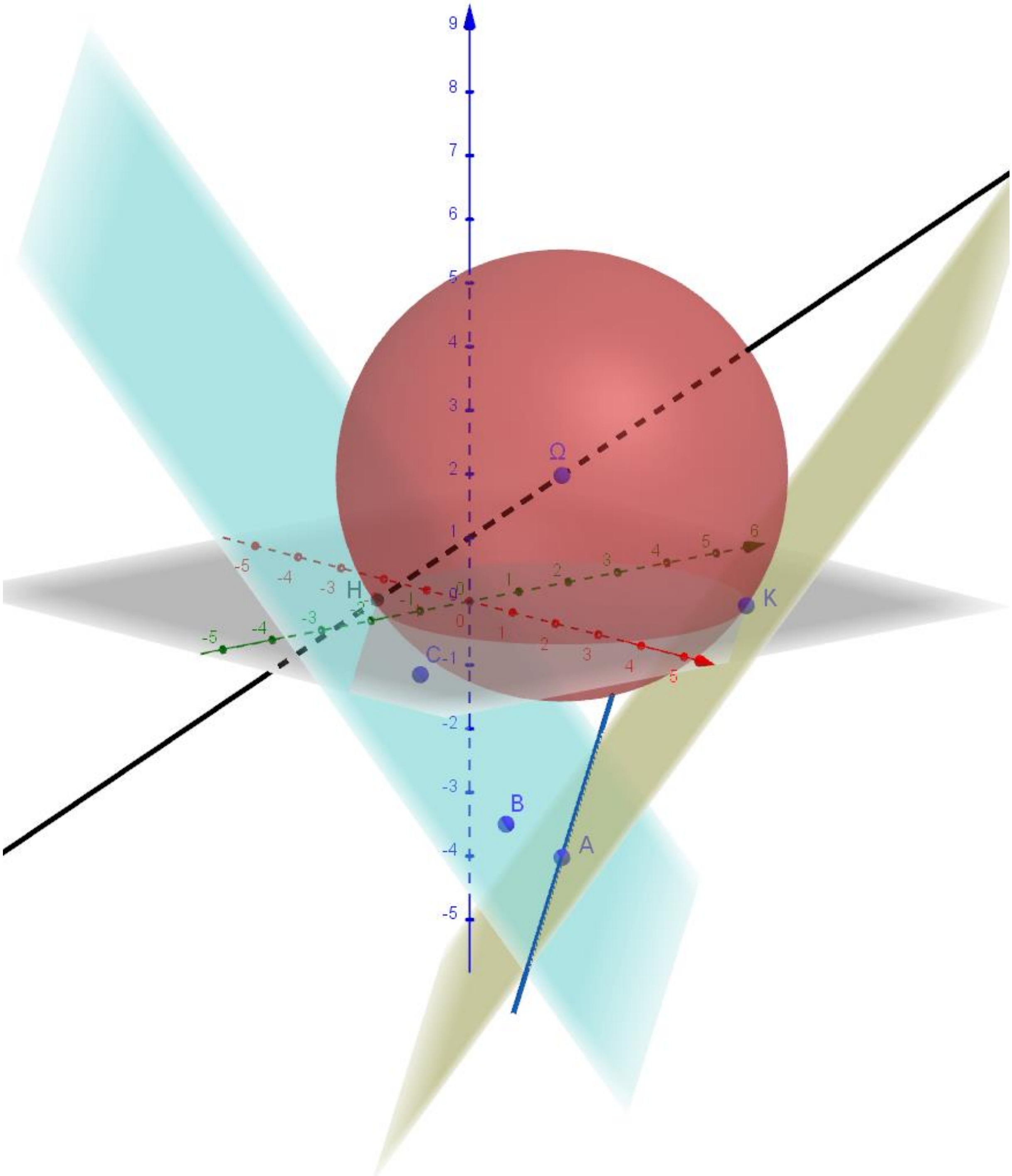
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-4=0 & (L_1+L_2) \\ 2z+8=0 & (L_1-L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2z=-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ z=-4 \end{cases}$$

En prenant pour paramètre $x=t$, on obtient une représentation paramétrique de Δ :
$$\boxed{\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=-4 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier


Ω
H
K
C
B
A

Ex 3 :

(u_n) : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$

1) $u_1 = 5u_0 - 8\times 0 + 6 = 5\times 0 + 6 = \boxed{6}$

$u_2 = 5u_1 - 8\times 1 + 6 = 5\times 6 - 8 + 6 = \boxed{28}$

2)

```
def suite_u(n):
    u = 0
    for i in range(1, n+1):
        u = 5 * u - 8 * (i-1) + 6
    return u
```

⚠ Ceci traduit : $u_i = 5u_{i-1} - 8(i-1) + 6$

3) a) Démontrons par récurrence $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$

Initialisation : pour $n = 0$, $\begin{cases} u_0 = 0 \\ 2n = 2\times 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_0 \geqslant 2\times 0 \Rightarrow P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 2n$ et mq $u_{n+1} \geqslant 2n+2$

On a (HR) : $u_n \geqslant 2n \Rightarrow 5u_n \geqslant 10n$

$\Rightarrow 5u_n - 8n + 6 \geqslant 10n - 8n + 6$

$\Rightarrow u_{n+1} \geqslant 2n + 6$

Or $2n + 6 \geqslant 2n + 2$, donc par transitivité, $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2n}$

b) On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ D'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

➔ Remarque pour la question 2 : Voir en fin d'exercice

c) On utilise la définition d'une limite infinie positive :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > M$

Dit autrement, tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang n_0 qui dépend du M choisi.

En posant $M = 10^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, on peut donc affirmer que :

$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant 10^p}$ (car $]M;+\infty[\subset [M;+\infty[$)

Pour les puristes...

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2n \Rightarrow 4u_n \geqslant 8n \Rightarrow 4u_n - 8n + 6 \geqslant 8n - 8n + 6$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 6 > 0$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

5) a) Il semble que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 5^n}$ Démontrons cette conjecture :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5$

$\iff v_{n+1} = 5(u_n - 2n + 1) = 5 \cdot v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme

$v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = 1 \times 5^n$

$\iff \boxed{v_n = 5^n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 2n + 1$

$\iff u_n = v_n + 2n - 1$

$\iff \boxed{u_n = 5^n + 2n - 1}$

➔ Remarque pour la question 2 :

Le script proposé dans l'énoncé était le suivant :

```
def suite_u(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=5*u-8*(i-1)+6
    return u
```

```
>>> suite_u(0)
0
>>> suite_u(1)
6
>>> suite_u(2)
28
```

Sans structure imposée par l'énoncé, nous aurions également pu écrire le script suivant qui intègre le décalage d'indice directement dans l'instruction « *range* » :

```
def autre_suite_u(n):
    u=0
    for i in range(0,n):
        u=5*u-8*i+6
    return u
```

```
>>> autre_suite_u(0)
0
>>> autre_suite_u(1)
6
>>> autre_suite_u(2)
28
```

Ex 4 :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) + \frac{1}{4}x$

$\Rightarrow$ Partie A :

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+$

Puis par somme et composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$, on obtient par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{-4e^{-x} + 1 + e^{-x}}{4\left(1+e^{-x}\right)} = \dfrac{1-3e^{-x}}{4\left(1+e^{-x}\right)}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\cancel{e^{-x}}\left(e^{x}-3\right)}{4\cancel{e^{-x}}\left(e^{x}+1\right)} = \boxed{\dfrac{e^{x}-3}{4\left(e^{x}+1\right)}}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0 \Rightarrow 4\left(e^{x}+1\right) > 0$

Donc f' est du signe de $e^{x}-3$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{x} - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x} \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 3$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

⚠ La limite en $-\infty$, difficile à obtenir en Terminale, n'était pas demandée.

c) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[2;5]$ car $\ln 3 \simeq 1,1 < 2$

On a : $\begin{cases} f(2) = \ln(1+e^{-2}) + \frac{1}{4}\times 2 \simeq 0,63 & < 1 \\ f(5) = \ln(1+e^{-5}) + \frac{1}{4}\times 5 \simeq 1,26 & > 1 \end{cases}$

Ainsi, $1 \in [f(2); f(5)] = f([2;5])$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\exists!\ \alpha \in [2;5],\ f(\alpha) = 1}$

⇒ Partie B :

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} e^x > 0 \\ e^x > 0 \Rightarrow 1+e^x > 0 \Rightarrow (1+e^x)^2 > 0 \end{cases}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ i.e. $\boxed{f''(x) > 0}$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$

Donc f est convexe.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au-dessus de (PQ), et en dessous de toutes ses cordes, en particulier en dessous de (MN). Comme on a $x_N = x_P = -\alpha$ et $x_M = x_Q = \alpha$, on en conclut que $\boxed{\text{sur } [-\alpha;\alpha],\ \mathcal{C}_f \text{ est inscrite dans } MNPQ.}$

2) ⓐ $f(-\alpha) = \ln\left(1+e^{-(-\alpha)}\right) + \frac{1}{4} \times (-\alpha)$

$= \ln\left(1+e^{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{4}$

$= \ln\left(e^{\alpha}\left(e^{-\alpha}+1\right)\right) - \frac{\alpha}{4}$

$= \ln(e^{\alpha}) + \ln\left(e^{-\alpha}+1\right) - \frac{\alpha}{4}$

$= \alpha + \ln\left(e^{-\alpha}+1\right) - \frac{\alpha}{4}$

$= \boxed{\ln\left(e^{-\alpha}+1\right) + \frac{3\alpha}{4}}$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $M\begin{pmatrix} \alpha \\ f(\alpha) \end{pmatrix}$ i.e. $M\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln\left(1+e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{4}\alpha \end{pmatrix}$

et $N\begin{pmatrix} -\alpha \\ f(-\alpha) \end{pmatrix}$ i.e. $N\begin{pmatrix} -\alpha \\ \ln\left(1+e^{-\alpha}\right)+\frac{3\alpha}{4} \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -2\alpha \\ \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$

Déterminons maintenant l'équation de Δ pour obtenir les coordonnées des pts P et Q.

$f(0) = \ln\left(1+e^{-0}\right) + \frac{1}{4} \times 0 = \ln 2$ et $f'(0) = \frac{e^0 - 3}{4(e^0+1)} = \frac{-2}{4 \times 2} = -\frac{1}{4}$

D'où Δ : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0) \iff y = -\frac{1}{4}x + \ln 2$

Ainsi, on a $Q\begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{\alpha}{4}+\ln 2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} -\alpha \\ \frac{\alpha}{4}+\ln 2 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix} -2\alpha \\ \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$

On obtient donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \iff$ $\boxed{\text{MNPQ est un parallélogramme.}}$