Ex 1 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 . \ln x$

1) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0^+$ (théorème des croissances comparées)

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} -2x^2 \ln x = 0^-$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x^2 = 1 + 0 = 1$

Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 + 0 = 1}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln x = -\infty$

D'autre part, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Donc par produit, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(1 - 2\ln x) = -\infty$

Enfin, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 0 + 2x - 2\left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$$

$$= \cancel{2x} - 4x \times \ln(x) - \cancel{2x}$$

$$= \boxed{-4x \ln x}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geqslant 0 \iff -4x\ln x \geqslant 0$

$\iff x \cdot \ln x \leqslant 0$

$\iff \ln x \leqslant 0$ car $x > 0$

$\iff x \in \,]0\,;1[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 1+1^2-2\times1^2\times\ln 1$
$= 1+1-2\times1\times0$
$= 2$

4) f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$

On a $f(1)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Ainsi, on a $0 \in \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\,f(1)\right] = f([1\,;+\infty[)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in [1\,;+\infty[}$

De plus, on a $f(1) = 2 > 0$ et $f(e) = 1+e^2-2e^2\times\ln e = 1+e^2-2e^2 = 1-e^2 < 0$

Comme $0 \in f([1\,;e])$ et $[1\,;e] \subset [1\,;+\infty[$, on en déduit que $\boxed{\alpha \in [1\,;e]}$

5) L'algorithme renvoie un encadrement (par dichotomie) de α d'amplitude inférieure ou égale 10^{-p}, i.e. à 10^{-1} dans le cas de "dichotomie(1)".
Comme $e \simeq 2{,}718$, les intervalles proposés en C et D ne peuvent pas convenir car ils ne sont pas inclus dans $[1\,;e]$. L'amplitude de l'intervalle proposé en A est supérieure à 10^{-1}, donc la réponse ne convient pas.

$\boxed{\text{Seule la proposition B remplit les deux conditions.}}$

$\Rightarrow$ Partie B : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

1) On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1+x^2) - 2x \times \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x}\left(1+x^2 - 2x^2 \ln x\right)}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x(1+x^2)^2 > 0$ donc g' est du signe de f.

En utilisant la partie A, on dresse le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	||	$\nearrow$		$\searrow$	

g' s'annule et change de signe ($+$ vers $-$) en α, donc $\boxed{g \text{ admet un maximum en } \alpha.}$

3) On a $g(1) = \dfrac{\ln 1}{1+1^2} = \dfrac{0}{2} = 0 \quad$ et $\quad g'(1) = \dfrac{f(1)}{1(1+1^2)^2} = \dfrac{2}{1 \times 4} = \dfrac{1}{2}$

D'où $T_1 : \quad y = g'(1) \times (x-1) + g(1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x-1)$

D'autre part, $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$ (admis) et $g'(\alpha) = 0$

D'où $T_\alpha : \quad y = g'(\alpha) \times (x - \alpha) + g(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \times (x-\alpha) + \dfrac{1}{2\alpha^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

Puis $T_1 \cap T_\alpha : \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x-1) \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2\alpha^2} \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{\alpha^2} \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{T_1 \cap T_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{2\alpha^2} \end{pmatrix} \right\}}$

Ex 2 :

1) Notons les évènements suivants :

J : " l'accouchement a donné naissance à des jumeaux "

T : " ______________________ au moins 3 enfants ".

ⓐ $$f_J = \frac{Card(J)}{Card(\Omega)} = \frac{293\,898}{18\,221\,965} \simeq 0{,}016 \boxed{\simeq 1{,}6\,\%} \quad (\text{à } 0{,}1\,\% \text{ près})$$

ⓑ $$f_T = \frac{Card(T)}{Card(\Omega)} = \frac{4921}{18\,221\,965} \simeq 0{,}00027 \simeq 0{,}027\,\% \boxed{< 0{,}1\,\%}$$

2) ⓐ On répète $n = 20$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " il s'agit d'un accouchement double " est égale à $p = 0{,}016$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}016$. $\boxed{X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}016)}$

Puis $P(X=1) = \binom{20}{1} \times 0{,}016^1 \times (1-0{,}016)^{20-1} = 20 \times 0{,}016 \times 0{,}984^{19}$

D'où $\boxed{P(X=1) \simeq 0{,}236}$ (à 10^{-3} près)

ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a désormais $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}016)$

On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \iff 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99 \iff P(X=0) \leqslant 0{,}01$

$\iff \binom{n}{0} \times 0{,}016^0 \times (1-0{,}016)^n \leqslant 0{,}01 \iff 1 \times 1 \times 0{,}984^n \leqslant 0{,}01 \iff 0{,}984^n \leqslant 0{,}01$

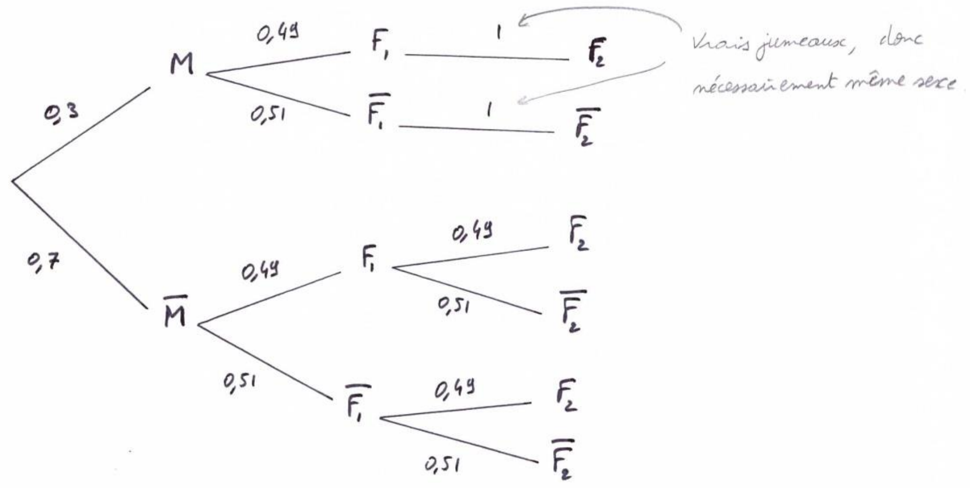
$\iff \ln(0{,}984^n) \leqslant \ln 0{,}01$ (par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n \ln 0{,}984 \leqslant \ln 0{,}01$

$\iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}984}$ (car $\ln 0{,}984 < 0$) , puis on a $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}984} \simeq 285{,}5$

Comme $n \in \mathbb{N}$, il faut choisir $\boxed{n = 286}$ accouchements en une journée pour que la probabilité qu'il y ait au moins un accouchement double soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

3) ⓐ



ⓑ $\{M ; \overline{M}\}$ forme un système complet d'événements (partition de l'univers)

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F_1 \cap F_2) = P(M \cap (F_1 \cap F_2)) + P(\overline{M} \cap (F_1 \cap F_2))$$

$$= P(M) \times P_M(F_1 \cap F_2) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(F_1 \cap F_2)$$

$$= 0{,}3 \times 0{,}49 \times 1 + 0{,}7 \times 0{,}49 \times 0{,}49$$

$$= 0{,}147 + 0{,}16807$$

$$\boxed{= 0{,}31507}$$

ⓒ $$P_{F_1 \cap F_2}(M) = \frac{P(M \cap (F_1 \cap F_2))}{P(F_1 \cap F_2)} = \frac{0{,}147}{0{,}31507} = \frac{14700}{31507} = \boxed{\frac{300}{643}}$$

D'où $\boxed{P_{F_1 \cap F_2}(M) \simeq 0{,}467}$ (à 10^{-3} près)

Ex 3 :

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a $C\begin{pmatrix}4\\-8\\0\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-4\\12\\3\end{pmatrix}$

Puis $CK = \|\overrightarrow{CK}\| = \sqrt{\overrightarrow{CK}^2} = \sqrt{(-4)^2+12^2+3^2} = \sqrt{16+144+9} = \sqrt{169} = 13$ u.l.

Donc $C \in \mathcal{S}(K;13)$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $C\begin{pmatrix}4\\-8\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\4\\16\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\4\\-10\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-4\\12\\16\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-4\\12\\-10\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -4\times(-4)+12\times12+16\times(-10) = 16+144-160 = 0$ donc $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

Ainsi, (CA) et (CB) sont perpendiculaires et le triangle ABC est rectangle en C.

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-4\\12\\16\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-4\\12\\-10\end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA} = 3\times(-4)+1\times12+0\times16 = -12+12+0 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{CA}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB} = 3\times(-4)+1\times12+0\times(-10) = -12+12+0=0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{CB}\end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ non colinéaires (car orthogonaux) qui dirigent le plan (ABC), donc $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme $3\times x+1\times y+0\times z+d=0$ i.e. $3x+y+d=0$

Or $A\begin{pmatrix}0\\4\\16\end{pmatrix}\in(ABC) \iff 3x_A+y_A+d=0 \iff 3\times0+4+d=0 \iff d=-4$

D'où (ABC) : $\boxed{3x+y-4=0}$

3) a) On veut $D \in (O,\vec{i})$ donc $D\begin{pmatrix} x_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et tq $x_D \geqslant 0$

Or $D \in \mathcal{S}$ donc $KD = 13$ avec $\overrightarrow{KD}\begin{pmatrix} x_D \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

D'où $KD = 13 \iff \sqrt{x_D^{\,2} + (-4)^2 + (-3)^2} = 13$

$\iff x_D^{\,2} + 16 + 9 = 169$

$\iff x_D^{\,2} = 144$

$\iff x_D = \sqrt{144} = 12$ car $x_D \geqslant 0$

Ainsi, $D\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\Delta \perp (ABC)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal à (ABC) est vecteur directeur de Δ.

De plus, $D\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta$

Donc $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Delta \iff \overrightarrow{DM} = \vec{n} \times t,\ t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x - 12 = 3 \times t \\ y = 1 \times t \\ z = 0 \times t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

Ainsi, on a $\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

c) Comme $D \in \Delta$ et $\Delta \perp (ABC)$, $\text{dist}(D,(ABC)) = DH$, avec $H \in \Delta \cap (ABC)$

i.e. H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

Ainsi, $\begin{cases} 3x_H + y_H - 4 = 0 \\ x_H = 12 + 3t_H \\ y_H = t_H \\ z_H = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow 3(12 + 3t_H) + t_H - 4 = 0$

$\Rightarrow 36 + 9t_H + t_H - 4 = 0$

$\Rightarrow 10\,t_H = -32$

$\Rightarrow t_H = -3{,}2 = -\frac{16}{5}$

Puis $\begin{cases} x_H = 12 + 3t_H = 12 + 3 \times \frac{-16}{5} = \frac{60 - 48}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \\ y_H = t_H = \frac{-16}{5} = -3{,}2 \\ z_H = 0 \end{cases}$ i.e. $H\begin{pmatrix} 12/5 \\ -16/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N., on a $H\begin{pmatrix} 12/5 \\ -16/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 48/5 \\ 16/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Enfin, $dist(D, (ABC)) = DH = \|\overrightarrow{HD}\| = \sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{2304 + 256}{5^2}} = \frac{\sqrt{2560}}{5}$

$\Leftrightarrow \boxed{dist(D, (ABC)) = \frac{16\sqrt{10}}{5} \text{ u.l.}}$

4) (HD) est la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC.

Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times HD$

car ABC est rectangle en C (voir question 1.b)

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times CA \times CB \times HD$

Or on a dans le R.O.N. : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{\overrightarrow{CA}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 144 + 256} = \sqrt{416} = 4\sqrt{26} \text{ u.l.} \\ CB = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{\overrightarrow{CB}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + (-10)^2} = \sqrt{16 + 144 + 100} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65} \text{ u.l.} \end{cases}$

Ainsi, $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times 4\sqrt{26} \times \cancel{2}\sqrt{65} \times \frac{16\sqrt{10}}{5}$

$= \frac{4}{3} \times \frac{16}{5} \times \sqrt{2 \times 13 \times 5 \times 13 \times 2 \times 5}$

$= \frac{4 \times 16 \times 2 \times 13 \times \cancel{5}}{3 \times \cancel{5}}$

$\boxed{= \frac{1664}{3} \text{ u.v.}}$

$\boxed{\simeq 555 \text{ u.v.}}$ (à l'unité près)

Ex 4 :

⇒ Partie A : (u_n) : $u_0 = 0,3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1-x)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1-x) = -2x^2 + 2x$

f est une fonction polynôme du second degré, concave car à coefficient dominant négatif, qui admet un maximum en $\alpha = \dfrac{-2}{2\times(-2)} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi, on peut dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; \tfrac{1}{2}] \text{, et donc sur } [0 ; \tfrac{1}{2}]}$

Rem : On pouvait également dériver f.

2) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$

$u_1 = 2u_0(1-u_0) = 2 \times 0,3 \times (1-0,3) = 0,6 \times 0,7 = \boxed{0,42}$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$

Initialisation : $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 0,42$, donc $u_0 \leqslant u_1$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

On a (HR) : $u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ par stricte croissance de f sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant u_{n+1}}$

3) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{1}{2} & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée} \end{cases}$$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [0; \frac{1}{2}]$ puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0; \frac{1}{2}]$

4) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; \frac{1}{2}]$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff 2\ell(1-\ell) = \ell \\ &\iff 2\ell(1-\ell) - \ell = 0 \\ &\iff \ell(2-2\ell-1) = 0 \\ &\iff \ell(1-2\ell) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } 1-2\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or (u_n) est croissante et $u_0 = 0{,}3 > 0$, ce qui élimine la solution $\ell = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

⇒ Partie B :

1) a) Si $b = 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} - P_n = P_n$ i.e. $P_{n+1} = 2P_n$

Ainsi, $\boxed{(P_n) \text{ est géométrique de raison } q = 2}$

b) Comme $P_0 = 3 > 0$ et $q = 2 > 1$, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty}$

Rem : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \cdot q^n = 3 \times 2^n$

2) Si $b = 0{,}2$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0{,}2 . P_n)$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}1 . P_n$

On a $v_0 = 0{,}1 \times P_0 = 0{,}1 \times 3 = \boxed{0{,}3}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0{,}1 \times P_{n+1} \\ &= 0{,}1 \times \left(P_n + P_n(1 - 0{,}2 . P_n)\right) \\ &= 0{,}1 \times \left(P_n(1 + 1 - 0{,}2 . P_n)\right) \\ &= \underbrace{0{,}1 \times P_n} \times (2 - 0{,}2 . P_n) \\ &= v_n \times 2 \times (1 - 0{,}1 . P_n) \\ &= \boxed{2v_n(1 - v_n)} \end{aligned}$$

b) On retrouve la suite (u_n) de la partie A qui converge vers $\ell = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}1 . P_n \iff P_n = 10 . v_n$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} P_n &= 10 \times \lim_{n \to +\infty} v_n \\ &= 10 \times 0{,}5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la population se stabilisera autour de 5000 individus.}}$