Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)

x	$-\infty$		$0{,}375$		$0{,}625$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		convexe	inflexion	concave	inflexion	convexe	

⇒ Partie B : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x$

1) ⓐ Au voisinage de l'infini, une fonction polynôme se comporte comme son monôme dominant, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Puis comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, on a par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

ⓑ Au voisinage de $-\infty$, on lève l'indétermination "$0 \times \infty$" en développant.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x = x^2 e^x - 5x e^x + 6e^x$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ (th croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$,

on obtient par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fct polynôme et de la fonction exponentielle

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-5)e^x + (x^2-5x+6)e^x = (x^2-5x+6+2x-5)\,e^x$

$$\boxed{= (x^2-3x+1)\,e^x}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc f' est du signe de x^2-3x+1 sur $\mathbb{R}$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9-4 = 5 > 0$ donc deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Puis la fonction polynôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur des racines, et du signe opposé entre les racines. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4) On a $\begin{cases} f'(0) = (0^2 - 3\times 0+1)\times e^0 = 1\times 1 = 1 \\ f(0) = (0^2-5\times 0+6)\times e^0 = 6\times 1 = 6 \end{cases}$

D'où $\mathcal{T}$: $\quad y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$

$\iff y = 1\times x + 6$

$\iff \boxed{y = x+6}$

5) ⓐ On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x+1)(x-2)\,e^{x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$, f'' est du signe de $(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
$x-2$			$-$		0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	
			inflexion		inflexion		

On a $\begin{cases} f(-1) = \left((-1)^2 - 5\times(-1) + 6\right)\times e^{-1} = (1+5+6)\times e^{-1} = 12\,e^{-1} \\ f(2) = \left(2^2 - 5\times 2 + 6\right)\times e^{2} = (4-10+6)\times e^{2} = 0\times e^{2} = 0 \end{cases}$

Donc f admet pour points d'inflexion : $\begin{pmatrix} -1 \\ 12e^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ⓑ f est concave sur $[-1\,;2]$ donc $\mathcal{C}$ se situe en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, en particulier en 0.

Ainsi, $\forall x \in [-1\,;2]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T

$\iff \boxed{\forall x \in [-1\,;2],\quad f(x) \leqslant x+6}$

Ex2 :

1) $a_1 = (1-0{,}15) \times a_0 + 0{,}1 \times b_0$

$= 0{,}85 \times 1700 + 0{,}1 \times 1300$

$= 85 \times 17 + 130$

$= 1445 + 130$

$= \boxed{1575}$

Puis $b_1 = 3000 - a_1 = 3000 - 1575 = \boxed{1425}$

Rem : on peut aussi vérifier ce résultat en calculant :

$b_1 = 0{,}15 \times a_0 + (1-0{,}1) \times b_0$

$= 0{,}15 \times 1700 + 0{,}9 \times 1300$

$= 15 \times 17 + 9 \times 130$

$= 255 + 1170$

$= \boxed{1425}$

2) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 3000}$ car aucun sportif ne quitte le club.

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = (1-0{,}15)\, a_n + 0{,}1\, b_n \\ a_n + b_n = 3000 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}85\, a_n + 0{,}1\, b_n \\ b_n = 3000 - a_n \end{cases}$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0{,}85\, a_n + 0{,}1\,(3000 - a_n)$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0{,}85\, a_n + 300 - 0{,}1\, a_n$

$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 300}$

4) a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$

D'où $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$

et montrons que $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$

On a : $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$

$\Rightarrow 0{,}75 \times 1200 \leqslant 0{,}75\, a_{n+1} \leqslant 0{,}75\, a_n \leqslant 0{,}75 \times 1700$

$\Rightarrow 900 \leqslant 0{,}75\, a_{n+1} \leqslant 0{,}75\, a_n \leqslant 1275$

$\Rightarrow 900 + 300 \leqslant 0{,}75\, a_{n+1} + 300 \leqslant 0{,}75\, a_n + 300 \leqslant 1275 + 300$

$\Rightarrow 1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1575 \leqslant 1700$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700}$$

b)

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} \leqslant a_n & \Rightarrow (a_n) \text{ est décroissante} \\ 1200 \leqslant a_n & \Rightarrow (a_n) \text{ est minorée} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, comme (a_n) est décroissante et minorée, alors $\boxed{(a_n) \text{ converge.}}$

L'encadrement précédent permet également de dire que cette limite l est dans l'intervalle $[1200 ; 1700]$

5) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - 1200$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 1200$

$$= 0{,}75 a_n + 300 - 1200$$
$$= \frac{3}{4} a_n - 900$$
$$= \frac{3}{4} a_n - \frac{3}{4} \times 1200$$
$$= \frac{3}{4} (a_n - 1200)$$
$$= 0{,}75 \cdot v_n$$

D'où $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique}}$ de raison $q = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

(b) On a $v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot q^n \iff \boxed{v_n = 500 \times 0{,}75^n}$

(c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - 1200$

$$\iff a_n = v_n + 1200$$
$$\iff \boxed{a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200}$$

6) (a) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$ car $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Puis par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 500 \times 0 + 1200 = \boxed{1200}$$

(b) $\boxed{\text{A long terme, le club A comptera 1200 membres.}}$

7) a) Il y avait deux possibilités pour l'avant-dernière ligne :

```
def seuil():
    n=0
    A=1700
    while A>=1280:
        n=n+1
        A=0.75*A+300
    return n
```

```
def seuil2():
    n=0
    A=1700
    while A>=1280:
        n=n+1
        A=500*(0.75**n)+1200
    return n
```

Les deux fonctions renvoient évidemment le même résultat dans la console :

```
>>> seuil()
7
>>> seuil2()
7
```

7) b) On veut $n \in \mathbb{N}$ tq $a_n < 1280$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n < 1280$

$\iff 500 \times 0{,}75^n + 1200 < 1280$

$\iff 500 \times 0{,}75^n < 80$

$\iff 0{,}75^n < \frac{80}{500}$

$\iff 0{,}75^n < 0{,}16$

$\iff \ln(0{,}75^n) < \ln 0{,}16$ car $\ln$ est strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \times \ln 0{,}75 < \ln 0{,}16$

$\iff n > \frac{\ln 0{,}16}{\ln 0{,}75}$ car $\ln 0{,}75 < 0$

Or $\frac{\ln 0{,}16}{\ln 0{,}75} \simeq 6{,}4$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc la fonction "seuil" va renvoyer $\boxed{7.}$

Ex 3:

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a $E\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}}$

ⓑ La présence du 0 dans la 2ème coordonnée de $\overrightarrow{FG}$ mais pas dans celle de $\overrightarrow{EF}$ montre que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas colinéaires : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{EF} \neq \lambda \overrightarrow{FG}$

Ainsi, $\boxed{\text{les points } E, F \text{ et } G \text{ ne sont pas alignés.}}$

Rem : On pourrait aussi montrer que le système associé à l'égalité $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{FG}$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ n'admet pas de solution.

2) ⓐ (FG) est dirigée par $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et passe par $F\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{(FG) : \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 2 \\ z = 1-4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

ⓑ Soit $H\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$, on a : $\begin{cases} x_H = -1+4t \\ y_H = 2 \\ z_H = 1-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -1+4t \\ 2 = 2 \\ -2 = 1-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = 3 \\ -4t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$

Donc H est le point de (FG) de paramètre $t = \frac{3}{4}$

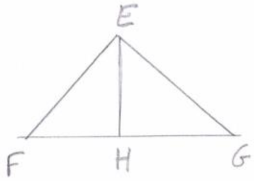
Puis on a $E\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$

D'où dans le R.O.N., $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} = -1\times4+4\times0+(-1)\times(-4) = -4+0+4 = 0$ donc $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{FG}$

Ainsi, (EH) et (FG) sont orthogonales, et même perpendiculaires puisque $H \in (FG)$

On peut donc en conclure que $\boxed{H\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de } E \text{ sur } (FG)}$

c) En utilisant la question précédente, on considère la hauteur (EH) relative à la base [FG] pour calculer l'aire du triangle EFG



$\mathcal{A}_{EFG} = \frac{1}{2} \times FG \times EH$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases} FG = \|\overrightarrow{FG}\| = \sqrt{\overrightarrow{FG}^2} = \sqrt{4^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{2\times16} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \\ EH = \|\overrightarrow{EH}\| = \sqrt{\overrightarrow{EH}^2} = \sqrt{(-1)^2+4^2+1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = \sqrt{2\times9} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$$

Enfin, $\mathcal{A}_{EFG} = \frac{1}{2} \times FG \times EH = \frac{1}{\cancel{2}} \times 4\cancel{\sqrt{2}} \times 3\cancel{\sqrt{2}} = 4\times3 = \boxed{12 \text{ cm}^2}$

3) a) Soient $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ dans le R.O.N.

On a : $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{FG} = 2\times4+1\times0+2\times(-4) = 8+0-8=0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{FG} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF} = 2\times(-4)+1\times4+2\times2 = -8+4+4=0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{EF} \end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EF}$ non colinéaires (voir question 1.b) qui dirigent le plan (EFG). Ainsi, $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (EFG)}}$

b) D'après la question précédente, (EFG) admet une équation cartésienne de la forme $2\times x+1\times y+2\times z+d=0 \iff 2x+y+2z+d=0$

Or $F\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\in(EFG)$ donc $2x_F+y_F+2z_F+d=0$

$\iff 2\times(-1)+2+2\times1+d=0$

$\iff d=-2$

Ainsi, on a (EFG) : $\boxed{2x+y+2z-2=0}$

ⓒ On a $(d) \perp (EFG)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ normal à (EFG) dirige (d)

De plus, $D\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} \in (d)$

D'où $\boxed{(d) : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

ⓓ K est le projeté orthogonal de D sur (EFG)

or on a $\begin{cases} D \in (d) \\ (d) \perp (EFG) \end{cases}$

Donc $K \in (d) \cap (EFG)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in (EFG) \\ K \in (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_K + y_K + 2z_K - 2 = 0 \\ x_K = 3 + 2\lambda_K \\ y_K = 1 + \lambda_K \\ z_K = 5 + 2\lambda_K \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 2(3 + 2\lambda_K) + (1 + \lambda_K) + 2(5 + 2\lambda_K) - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 6 + 4\lambda_K + 1 + \lambda_K + 10 + 4\lambda_K - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 9\lambda_K + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_K = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$

Puis $\begin{cases} x_K = 3 + 2\lambda_K = 3 + 2 \times \frac{-5}{3} = 3 - \frac{10}{3} = \frac{-1}{3} \\ y_K = 1 + \lambda_K = 1 + \frac{-5}{3} = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \\ z_K = 5 + 2\lambda_K = 5 + 2 \times \frac{-5}{3} = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$ D'où $\boxed{K\begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\5/3\end{pmatrix}}$

4) ⓐ Dans le R.O.N., on a $D\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\5/3\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}-10/3\\-5/3\\-10/3\end{pmatrix}$

Puis $DK = \|\overrightarrow{DK}\| = \sqrt{\overrightarrow{DK}^2} = \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{-10}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{100+25+100}{3^2}}$

$= \frac{\sqrt{225}}{3} = \frac{15}{3} = 5$

On a bien $\boxed{DK = 5 \text{ cm}}$

ⓑ Comme K est le projeté orthogonal de D sur (EFG), (DK) est la hauteur du tétraèdre DEFG relative à la base triangulaire EFG.

D'où $V_{DEFG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EFG} \times DK$

$= \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times \cancel{12}^{4} \times 5$

$= \boxed{20 \text{ cm}^3}$

Ex 4 :

$\boxed{1)\ B}$

Il s'agit d'une F.I. "$\frac{\infty}{\infty}$" que l'on peut lever en modifiant la forme de f.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x) = 0{,}05 - \frac{\ln x}{x-1} = 0{,}05 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (th. croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \times 1}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$

D'où par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0{,}05 - 0 \times 1 = 0{,}05$

$\boxed{2)\ C}$

Nous n'avons aucune information permettant de conclure sur les réponses A ; B et D.

Par contre, comme h est continue sur $[1;3] \subset [-2;4]$ et $1 \in [-1;4] = [h(3); h(1)]$,

le TVI permet de conclure que : $\exists a \in [1;3]$, $h(a) = 1$

⚠ On ne sait pas si $[h(3); h(1)] = h([1;3])$

$\boxed{3)\ B}$

La $1^{ère}$ proposition est fausse, en prenant $(v_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

La $2^{ème}$ proposition est correcte, il s'agit d'une limite de quotient : $\lim\limits_{+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$

La $3^{ème}$ proposition est fausse, car (u_n) peut être croissante à partir d'un certain rang, ou encore on peut choisir $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ n^2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ qui n'est pas monotone et tend vers $+\infty$

La $4^{ème}$ proposition donne une suite divergente de $2^{ème}$ espèce car son signe change avec la parité de n.

$\boxed{4)\ D}$

On a $X(\Omega) = \{12-4\ ;\ 3-4\ ;\ 0-4\} = \{8\ ;\ -1\ ;\ -4\}$

Puis $\{X = 8\}$ est réalisé en obtenant 1, donc $P(X=8) = \frac{1}{6}$

$\{X=-1\}$ est réalisé en obtenant 2, 4 ou 6, donc $P(X=-1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Et donc $\{X = -4\}$ a une probabilité : $P(X=-4) = 1 - P(X=8) - P(X=-1)$
$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{3}$

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-4	-1	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

D'où $E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i) = -4\times\frac{1}{3} + (-1)\times\frac{1}{2} + 8\times\frac{1}{6} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{5)\ C}$

$X \sim \mathcal{B}(3\ ;\ p)$

$P(X=0) = \frac{1}{125} \iff \binom{3}{0} \times p^0 \times (1-p)^{3-0} = \frac{1}{125}$

$\iff 1 \times 1 \times (1-p)^3 = \frac{1}{125}$

$\iff (1-p)^3 = \frac{1}{125}$

$\iff 1-p = \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

$\iff 1-p = \frac{1}{5}$

$\iff p = \frac{4}{5}$

souvenir de 2^{nde}, solution unique de l'équation $x^3 = k$ $(\in \mathbb{R})$ est $x = \sqrt[3]{k} = k^{1/3}$

ou $(1-p)^3 = \frac{1}{125} \iff (1-p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \iff 1-p = \frac{1}{5} \iff p = \frac{4}{5}$