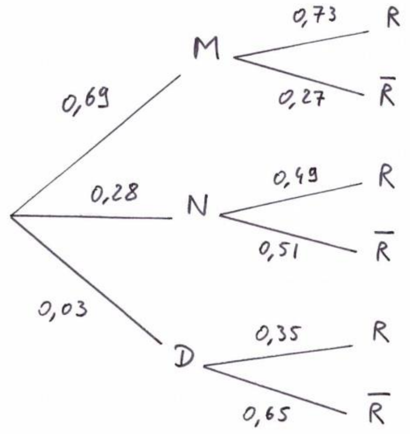
Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



2) $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = \boxed{0{,}0105}$

3) $P(M \cap \overline{R}) = P(M) \times P_M(\overline{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = \boxed{0{,}1863}$

La probabilité que le déchet soit minéral, non dangereux et non recyclable est égale à 0,1863

4) $\{M ; N ; D\}$ forme un système complet d'évènements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R)$$
$$= P(M) \times P_M(R) + P(N) \times P_N(R) + 0{,}0105$$
$$= 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}0105$$
$$= 0{,}5037 + 0{,}1372 + 0{,}0105$$
$$= \boxed{0{,}6514}$$

5) $P_R(N) = \dfrac{P(N \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}1372}{0{,}6514} = \dfrac{1372}{6514} = \dfrac{686}{3257} \boxed{\simeq 0{,}2106}$ (à 10^{-4} près)

$\Rightarrow$ Partie B :

1) ⓐ D'après les données de l'énoncé, on a $\boxed{n = 20 \quad \text{et} \quad p = P(R) = 0{,}6514}$

D'où $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}6514)$

ⓑ $P(X=14) = \binom{20}{14} \times p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \binom{20}{14} \times (0{,}6514)^{14} \times (0{,}3486)^{6} \boxed{\simeq 0{,}1723}$

à 10^{-4} près

2) ⓐ Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}6514)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \times p^{0} \times (1-p)^{n-0} = 1 \times 1 \times 0{,}3486^{n} = \boxed{0{,}3486^{n}}$$

ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut :

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9999$

$\Leftrightarrow \quad 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}9999$

$\Leftrightarrow \quad P(X=0) \leqslant 0{,}0001$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}3486^{n} \leqslant 0{,}0001$

Par (stricte) croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}3486^{n}) \leqslant \ln 0{,}0001$

$\Leftrightarrow \quad n \ln 0{,}3486 \leqslant \ln 0{,}0001$

car $\ln 0{,}3486 < 0$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}3486}$

Or $\dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}3486} \simeq 8{,}74$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Il faut donc choisir $\boxed{n = 9}$

Ex 2 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$

1) a) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+$

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0^+$

Puis par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{2x} = 0^+$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x-3 = +\infty$

Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$

b) Il s'agit d'une F.I. du type "$\infty - \infty$"

On $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3 = 2x\left(3 \times \dfrac{e^{2x}}{2x} - 1 - \dfrac{3}{2x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (th croissances comparées).

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2x} = 0^+$

Donc par opérations sur les limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2) a) On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3 \times 2 \times e^{2x} - 2 - 0$

$\Leftrightarrow \boxed{g'(x) = 6e^{2x} - 2}$

ⓑ Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 &\iff 6e^{2x} - 2 \geqslant 0 \\ &\iff 6e^{2x} \geqslant 2 \\ &\iff e^{2x} \geqslant \frac{1}{3} \\ &\iff 2x \geqslant \ln\frac{1}{3} \\ &\iff 2x \geqslant -\ln 3 \\ &\iff x \geqslant -\frac{1}{2}\ln 3 \end{aligned}$$

par (stricte) croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

(ou $-\ln\sqrt{3}$)

ⓒ

x	$-\infty$		$-\ln\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g\left(-\ln\sqrt{3}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = 3e^{\cancel{2}\times\frac{-1}{\cancel{2}}\times\ln 3} - \cancel{2}\times\frac{-1}{\cancel{2}}\times\ln(3) - 3 = 3e^{\ln\frac{1}{3}} + \ln(3) - 3$$

$$= \cancel{3}\times\frac{1}{\cancel{3}} + \ln(3) - 3$$

$$= \boxed{\ln(3) - 2}$$

3) ⓐ $g(0) = 3\times e^{2\times 0} - 2\times 0 - 3 = 3\times 1 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$

Donc $x = 0$ est solution de $g(x) = 0$

ⓑ $0 \in [-\ln\sqrt{3}\,; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u>. Le théorème de la bijection (corollaire du TVI) permet de conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle (car $0 \in [\ln(3)-2\,; +\infty[$) qui, d'après la question précédente, est 0.

car $\ln(3) - 2 \simeq -0{,}9 < 0$

<u>Rem :</u> Nous avons utilisé 2 couleurs différentes pour ne pas confondre les zéros utilisés : le rouge est dans l'intervalle image, alors que le vert est la solution de l'équation $g(x)=0$. On a donc : $g(0) = 0$

D'autre part, sur $]-\infty ; -\ln\sqrt{3}[$, g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u>.

On a $g\left(]-\infty ; -\ln\sqrt{3}[\right) =]\ln(3)-2 ; +\infty[$

Comme $0 \in g\left(]-\infty ; -\ln\sqrt{3}[\right)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists ! \alpha \in]-\infty ; -\ln\sqrt{3}[$, $g(\alpha) = 0$

Par balayage, on a :

$g(-2) > 0$ et $g(-1) < 0$ donc $\alpha \in]-2 ; -1[$

Puis $g(-1,5) > 0$ et $g(-1,4) < 0$ donc $\alpha \in]-1,5 ; -1,4[$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet exactement 2 solutions sur } \mathbb{R} : x = 0 \text{ et } x = \alpha \in]-1,5 ; -1,4[}$

4) D'après les questions précédentes, on a :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ Partie B : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{3x} - (2x+1)\cdot e^{x}$

1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= 3e^{3x} - \left(2 \times e^{x} + (2x+1) \times e^{x}\right)\\
&= e^{x} \times 3e^{2x} - e^{x}\left(2 + 2x + 1\right)\\
&= e^{x} \times 3e^{2x} - e^{x} \times (2x+3)\\
&= e^{x} \times \left(3e^{2x} - (2x+3)\right)\\
&= e^{x} \times \left(3e^{2x} - 2x - 3\right)\\
&= \boxed{e^{x} \times g(x)}
\end{aligned}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0$ donc f' est du signe de g sur $\mathbb{R}$.

On utilise la question A.4) :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

3) f convexe sur $\mathbb{R}$ $\iff$ f' est croissante sur $\mathbb{R}$

Or d'après la question précédente, f' change deux fois de signe sur $\mathbb{R}$ (en α et en 0), ce qui contredit l'hypothèse de croissance sur $\mathbb{R}$ de f'.

Ainsi, par contraposition, on en conclut que $\boxed{f \text{ n'est pas convexe sur } \mathbb{R}.}$

Ex 3 :

1) A

On a $A\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{4^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6 \quad u.l. \\ AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6 \quad u.l. \\ BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{0^2+(-6)^2+6^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2\times 36} = 6\sqrt{2} \quad u.l. \end{cases}$$

Ainsi, le triangle ABC est isocèle en A.

On remarque assez facilement que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc la réciproque du th. de Pythagore permet de conclure que ABC est rectangle en A.

On pourrait aussi utiliser le produit scalaire :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 4 + 4\times(-2) + (-2)\times 4 = 16 - 8 - 8 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

2) C

Comme nous n'avons pas de vecteur normal, il faut tester pour chacune des équations proposées si les points B ; C et D ont des coordonnées compatibles.

Il y a donc potentiellement 12 calculs à faire (en réalité beaucoup moins)

On a $2x_D + y_D - z_D - 15 = 2\times 8 + (-3) - (-8) - 15 = 6 \neq 0$ ce qui élimine la réponse A)

Puis $9x_C - 5y_C + 3 = 9\times 3 - 5\times 0 + 3 = 30 \neq 0$ ce qui élimine la réponse B)

Puis $\begin{cases} 4x_B + y_B + z_B - 21 = 4\times 3 + 6 + 3 - 21 = 0 \\ 4x_C + y_C + z_C - 21 = 4\times 3 + 0 + 9 - 21 = 0 \\ 4x_D + y_D + z_D - 21 = 4\times 8 + (-3) + (-8) - 21 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Réponse C)

On pourrait aussi s'assurer que $11x_B + 5z_B - 73 = 11\times 3 + 5\times 3 - 73 = -25 \neq 0$ éliminant la réponse D)

$\boxed{3)\ B}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) d'éq. cartésienne $x-2y-2z+15=0$

Donc $\overrightarrow{HD}$ doit être colinéaire à $\vec{n}$ et $H\in(ABC)$

* Pour a), on a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}10\\-20\\-20\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{HD}=10\times\vec{n}$

Puis $x_H-2y_H-2z_H+15=-2-2\times17-2\times12+15=-45\neq0$ donc réponse incorrecte

* Pour b), on a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}5\\-10\\-10\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{HD}=5\vec{n}$

Puis $x_H-2y_H-2z_H+15=3-2\times7-2\times2+15=3-14-4+15=0$ => réponse correcte

$\boxed{4)\ D}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ dirige Δ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc Δ et (BC) ne sont ni confondues, ni strictement parallèles, éliminant ainsi les réponses a) et b)

$\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ dirige (BC) et $C\begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}\in(BC)$

Donc $(BC):\begin{cases}x=3\\y=-\lambda\\z=9+\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$

⚠ On choisit impérativement un paramètre différent de celui de Δ.

Puis $\Delta\cap(BC):\begin{cases}5+t=3\\3-t=-\lambda\\-1+3t=9+\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-2\\\lambda=t-3=-2-3=-5\\\lambda=-10+3t=-10+3\times(-2)=-16\end{cases}$ ⇐ incompatibles

Donc $\Delta\cap(BC)=\emptyset$ => réponse d)

$\boxed{5)\ B}$

$\vec{m}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

$\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants selon une droite.

Testons l'appartenance des points A, B et C au plan $\mathcal{P}$ pour trancher entre les trois propositions restantes :

$2x_A - y_A + 2z_A - 6 = 2\times(-1) - 2 + 2\times 5 - 6 = -2 - 2 + 10 - 6 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$

$2x_B - y_B + 2z_B - 6 = 2\times 3 - 6 + 2\times 3 - 6 = 6 - 6 + 6 - 6 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow$ la réponse b) est correcte

On pouvait aussi s'assurer que :

$2x_C - y_C + 2z_C - 6 = 2\times 3 - 0 + 2\times 9 - 6 = 6 + 18 - 6 = 18 \neq 0$ donc $C \notin \mathcal{P}$

Ceci élimine les réponses c) et d)

Ex4:

$\Rightarrow$ Partie A: (u_n) : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$

1) $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{11}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{25+11}{5} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \times \frac{\cancel{36}^{18}}{5} = \boxed{\frac{18}{5}}$

$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{11}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{18^2 + 275}{5 \times 18} = \frac{1}{2} \times \frac{324+275}{90}$

$\Leftrightarrow \boxed{u_2 = \frac{599}{180}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 11 \times \frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 11}{x^2} = \frac{x^2-11}{2x^2}$

Puis $\forall x \in [\sqrt{11}; +\infty[$, on a :

$x \geqslant \sqrt{11} \Rightarrow x^2 \geqslant 11 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 11 \geqslant 0 \\ 2x^2 \geqslant 22 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$

Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } [\sqrt{11}; +\infty[}$

3) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = \frac{18}{5} = 3,6 \\ \sqrt{11} \simeq 3,32 \end{cases} \Rightarrow u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{11} \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$ et mq : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{11}$

D'après la question précédente, f est croissante sur $[\sqrt{11}; +\infty[$, d'où :

HR : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11} \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(\sqrt{11})$

Or on a : $\begin{cases} f(u_n) = u_{n+1} \\ f(u_{n+1}) = u_{n+2} \\ f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{\cancel{11}\sqrt{11}}{\cancel{11}}\right) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{11} = \sqrt{11} \end{cases}$

D'où $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11} \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{11} \Rightarrow P(n+1)$ vraie

Conclusion : $P(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}}$

4) D'après la question précédente, on a :

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{11} & \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée par } \sqrt{11} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite réelle $a \geqslant \sqrt{11}$

5) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue (car dérivable) sur $[\sqrt{11} ; +\infty[$, et que (u_n) converge, alors d'après le théorème du point fixe, on sait que $\boxed{\text{la limite } a \text{ est solution de } f(x) = x}$. D'où : Soit $a \geqslant \sqrt{11}$,

$f(a) = a \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a + \frac{11}{a}\right) = a \Leftrightarrow a + \frac{11}{a} = 2a \Leftrightarrow \frac{11}{a} = a \Leftrightarrow a^2 = 11$

Ainsi, $a = \sqrt{11}$ car $a \geqslant \sqrt{11}$ ne peut pas être négatif (on exclut $-\sqrt{11}$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{11}}$

$\Rightarrow$ Partie B : Soit (L_n) : $L_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = \dfrac{L_n + \ell_n}{2}$

1) a) On a $\mathcal{A}_{R_0} = L_0 \times \ell_0 \iff 11 = 5 \times \ell_0 \iff \ell_0 = \dfrac{11}{5} = \dfrac{22}{10} = \boxed{2,2}$

b) Les rectangles R_n sont d'aire constante égale à 11, ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = 11 \iff L_n \times \ell_n = 11 \iff \boxed{\ell_n = \dfrac{11}{L_n}}$

2) Tout d'abord, on a $u_0 = L_0 = 5$

d'après B.1.b)

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = \dfrac{L_n + \ell_n}{2} = \dfrac{1}{2}\left(L_n + \ell_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(L_n + \dfrac{11}{L_n}\right)$

Les relations de récurrence de (u_n) et de (L_n) sont identiques et les deux suites ont le même premier terme, donc $\boxed{(L_n) \text{ correspond à } (u_n)}$.

3) D'après la question précédente et la question A.3), on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n \geqslant \sqrt{11}}$

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n \geqslant \sqrt{11} \Rightarrow \dfrac{1}{L_n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \dfrac{1}{L_n} \leqslant \dfrac{\sqrt{11}}{11}$

$\Rightarrow \dfrac{11}{L_n} \leqslant \cancel{11} \times \dfrac{\sqrt{11}}{\cancel{11}}$

$\Rightarrow \boxed{\ell_n \leqslant \sqrt{11}}$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n}$

4) Géométriquement, ceci signifie que la longueur L_n et la largeur ℓ_n du rectangle R_n vont tendre vers la même valeur $\sqrt{11}$, et qu'ainsi le rectangle R_n va tendre vers $\boxed{\text{un carré de côté } L_n = \ell_n = \sqrt{11}}$

Rem : On pourrait démontrer que les suites (ℓ_n) et (L_n) sont adjacentes.
$\hookrightarrow$ cf complément HP sur les suites.

5)

a)

```python
def heron(n):
    L=5
    l=2.2
    for i in range(n):
        L=(L+l)/2
        l=11/L
    return round(l,6),round(L,6)
```

```
>>> heron(3)
(3.316606, 3.316643)
```

On obtient donc $\boxed{\ell \simeq 3,316606}$ et $\boxed{L \simeq 3,316643}$, qui sont les valeurs approchées arrondies à 10^{-6} près de ℓ_3 et de L_3, i.e. de ℓ et L après 3 itérations.

On rappelle à ce propos que l'instruction « $range(n)$ » est un raccourci de « $range(0, n)$ », qui signifie en langage naturel que l'on va de « 0 » à « $n-1$ ».
On effectue donc $(n-1)-0+1=n$ itérations.

b) Ceci signifie que : $\boxed{3,316606 \leq \sqrt{11} \leq 3,316643}$

Ainsi, après seulement 3 itérations, nous obtenons une précision à 10^{-4} près de la valeur exacte de $\sqrt{11}$ car $\sqrt{11} \simeq 3,31662479$. La convergence semble donc rapide.

Remarque : Pour plus de renseignements sur la rapidité de convergence d'une suite, vous pouvez consulter le complément hors-programme sur les suites.