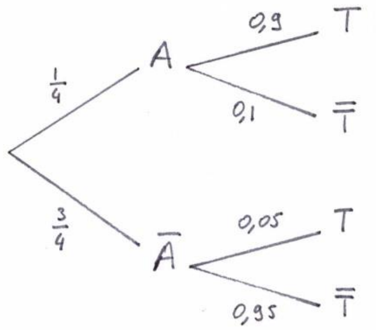
Ex 1 :

⇒ Partie I :

1)



$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = \frac{1}{4} \times 0{,}9 = \boxed{0{,}225}$

2) $\{A ; \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$P(T) = P(A \cap T) + P(\overline{A} \cap T) = 0{,}225 + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(T) = 0{,}225 + \frac{3}{4}\,0{,}05 = 0{,}225 + 0{,}0375$

$\Leftrightarrow \boxed{P(T) = 0{,}2625}$

3) $P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}225}{0{,}2625} = \dfrac{2250}{2625} = \dfrac{\cancel{25} \times 90}{\cancel{25} \times 105} = \dfrac{\cancel{5} \times 18}{\cancel{5} \times 21} \boxed{= \dfrac{6}{7} \simeq 0{,}8571}$

(à 10^{-4} près)

4) a) Il s'agit de $\overline{A} \cap T$ et $A \cap \overline{T}$

b) $P(E) = P\left((\overline{A} \cap T) \cup (A \cap \overline{T})\right)$ ← union disjointe

$= P(\overline{A} \cap T) + P(A \cap \overline{T})$

$= 0{,}0375 + P(A) \times P_A(\overline{T})$

$= 0{,}0375 + \frac{1}{4} \times 0{,}1$

$= 0{,}0375 + 0{,}025$

$\boxed{= 0{,}0625}$

⇒ Partie II :

1) ⓐ On répète $n = 50$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "le test est erroné" est $p = P(E) = 0,0625$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,0625)}$

ⓑ $P(X=7) = \binom{50}{7} \times 0,0625^7 \times (1-0,0625)^{50-7} \boxed{\simeq 0,0232}$ (à 10^{-4} près)

ⓒ $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{50}{0} \times 0,0625^0 \times (1-0,0625)^{50-0}$

$= 1 - 1 \times 1 \times 0,9375^{50}$

$\boxed{\simeq 0,9603}$ (à 10^{-4} près)

2) On veut $P(X \geqslant 10) > 0,95$

$\iff 1 - P(X < 10) > 0,95$

$\iff P(X < 10) < 0,05$

$\iff P(X \leqslant 9) < 0,05$

Il faut ici procéder par essais-erreurs avec la calculatrice, en utilisant la fonction de répartition.

On obtient : Pour $n = 247$, $P(X \leqslant 9) \simeq 0,0514 > 0,05$

Pour $n = 248$, $P(X \leqslant 9) \simeq 0,0498 < 0,05$

L'échantillon doit donc avoir une taille minimale de $\boxed{248 \text{ patients}}$.

Remarque :

Dans l'exercice 1 – Partie 2, la dernière question est assez inhabituelle car vous vous attendiez certainement à lire $P(X \geq 1)$ à la place de $P(X \geq 10)$.
La résolution avec $P(X \geq 10)$ fait uniquement intervenir une manipulation de calculatrice alors que celle avec $P(X \geq 1)$ nous permet de mettre en œuvre la rédaction habituelle avec le logarithme népérien. Peut-être s'agit-il d'une erreur dans le sujet ?
Dans tous les cas, il faudra vous adapter le jour de l'examen.

Pour vous entrainer, vous pouvez chez vous répondre à la question avec $P(X \geq 1)$, dont voici la correction :

2) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n ; 0{,}0625)$

On veut $P(X \geq 1) > 0{,}95$

$\iff 1 - P(X=0) > 0{,}95$

$\iff P(X=0) < 0{,}05$

$\iff \binom{n}{0} \times 0{,}0625^0 \times (1-0{,}0625)^{n-0} < 0{,}05$

$\iff 1 \times 1 \times 0{,}9375^n < 0{,}05$

$\iff \ln(0{,}9375^n) < \ln 0{,}05$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \times \ln 0{,}9375 < \ln 0{,}05$

$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9375}$

On a $\dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9375} \simeq 46{,}4$ et on veut $n \in \mathbb{N}$,

Donc il faut $\boxed{\text{au moins 47 personnes}}$ dans l'échantillon.

Ex 2 :

⇒ Partie I : (u_n) : $u_0 = 0,1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,9\,u_n(1-u_n)$

1) a) Soit la fonction f : $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 1,9x(1-x) = -1,9x^2 + 1,9x$

f est une fonction polynôme du second degré à coefficient dominant négatif. f est donc concave et atteint son maximum en $\alpha = \frac{-1,9}{2\times(-1,9)} = \frac{1}{2}$

Puis on a :
$$\begin{cases} f(0) = -1,9\times 0^2 + 1,9\times 0 = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1,9\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1,9\times\frac{1}{2} = 1,9\times\frac{1}{4} = 0,475 \\ f(1) = 1,9\times 1\times(1-1) = 0 \end{cases}$$

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	0	↗	$0,475$	↘	0

Rem : On pouvait également utiliser le signe de la dérivée, avec
$\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 1,9\big((1-x) + x\times(-1)\big) = 1,9(1-2x)$

b) D'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur $[0;\frac{1}{2}]$

On a donc $f\left([0;\frac{1}{2}]\right) = \left[f(0); f(\frac{1}{2})\right] = [0; 0,475] \subset [0;\frac{1}{2}]$

D'où $\boxed{x \in [0;\frac{1}{2}] \Rightarrow f(x) \in [0;\frac{1}{2}]}$ (On dit que $[0;\frac{1}{2}]$ est stable par f)

2) Il semble que (u_n) soit $\boxed{\text{croissante}}$ et qu'elle $\boxed{\text{converge}}$ vers son point fixe (intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la 1ère bissectrice) non nul.

On lit $\boxed{x \simeq 0,47}$

Avec la question 1), on serait tentés de dire que $x = 0,475$, mais la suite de l'exercice nous montrera que la limite de (u_n) n'est pas $0,475$

3) ⓐ Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ $\quad \mathcal{P}(n)$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 1,9 \times 0,1 \times (1-0,1) = 0,171$

On a $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$

On a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ (HR)

$\Rightarrow f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ par (stricte) croissance de f sur $[0; \frac{1}{2}]$ ⚠

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,475 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie (par transitivité)

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}}$

ⓑ D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{1}{2} & \Rightarrow (u_n) \text{ majorée par } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant \frac{1}{2}$ (mais pas forcément vers $\frac{1}{2}$)

ⓒ D'après le théorème du point fixe, f étant continue sur $[0;1]$, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow -1,9\,\ell^2 + 1,9\,\ell = \ell \\ &\Leftrightarrow -1,9\,\ell^2 + 0,9\,\ell = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell(-1,9\,\ell + 0,9) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -1,9\,\ell + 0,9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{0,9}{1,9} = \frac{9}{19} \quad (\simeq 0,474 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}) \end{aligned}$$

La solution $\ell = 0$ est à exclure car $u_0 = 0,1$ et (u_n) est croissante.

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{9}{19}}$

$\Rightarrow$ Partie II : (u_n) : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (1 - u_n)$

1) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0^+$ suite géométrique de raison $q \in]0;1[$

Donc d'après le théorème d'encadrement (th. des gendarmes), $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

2) La fonction "algo" renvoie le plus petit rang n à partir duquel $u_n \leqslant 10^{-p}$, la valeur de p étant saisie en argument.

Comme (u_n) tend vers 0, par définition, il existe un rang n_0 à partir duquel tous termes de la suite sont compris dans $]-\varepsilon ; \varepsilon[$ pour une valeur de ε fixée initialement. En posant $\varepsilon = 10^{-p}$, ceci garantit que la fonction algo renverra toujours un résultat, i.e. que la boucle "while" ne tournera pas indéfiniment.

Ex 3 :

⇒ Partie I : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{2 - 2\ln x}{x^2}}$$

2) ⓐ $g(e) = \dfrac{2 \times \ln e}{e} = \dfrac{2 \times 1}{e} = \boxed{\dfrac{2}{e}}$

ⓑ $g'(x) \geqslant 0 \iff 2 - 2\ln x \geqslant 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x^2 > 0$

$\iff \ln x \leqslant 1$

$\iff x \leqslant e$

Donc g est strictement croissante sur $]0; e]$, strictement décroissante sur $[e; +\infty[$ et admet un maximum en e qui vaut $\frac{2}{e}$

ⓒ * limite en 0^+ :

on a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{x} = +\infty \end{cases}$ ⇒ Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$

* limite en $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ (th croissances comparées), puis par produit

on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^+}$

3) D'après le tableau de variations, on en déduit le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

⚠ le 0 n'est jamais atteint au voisinage de $+\infty$

⇒ Partie II : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (\ln x)^2$

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée d'une fonction $(x \mapsto \ln x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto x^2$)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \boxed{g(x)}$ car $(u^2)' = 2.u'.u$

2) ⓐ Comme $g = f'$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit la convexité de f avec les variations de g :

x	0		e		$+\infty$
variations de $g = f'$	‖	↗		↘	
convexité de f	‖	convexe		concave	

pt inflexion

ⓑ comme $g = f'$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit les variations de f avec le signe de g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x) = f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ puis $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

$f(1) = (\ln 1)^2 = 0^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

3) ⓐ La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en e a pour équation $y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$

On a $f(e) = (\ln e)^2 = 1^2 = 1$ et $f'(e) = g(e) = \frac{2}{e}$

D'où $\mathcal{T}$: $y = \frac{2}{e}(x - e) + 1 \iff y = \frac{2}{e}x - 2 + 1 \iff \boxed{y = \frac{2}{e}x - 1}$

ⓑ f est convexe sur $]0; e]$ donc $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle, en particulier la tangente $\mathcal{T}$ en e.

Ceci se traduit par : $\forall x \in]0; e]$, $f(x) \geqslant \frac{2}{e}x - 1 \iff \boxed{(\ln x)^2 \geqslant \frac{2}{e}x - 1}$

Ex 4 :

1) a) Dans le R.O.N. $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a : $\boxed{C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \ F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

b) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{CI}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ car $I\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{CF} = 1\times 0 + 2\times(-1) + 2\times 1 = 0 - 2 + 2 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \vec{CF} \\ \vec{n}\cdot\vec{CI} = 1\times(-1) + 2\times\frac{-1}{2} + 2\times 1 = -1 - 1 + 2 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \vec{CI} \end{cases}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs (non colinéaires) $\vec{CF}$ et $\vec{CI}$ qui dirigent le plan (CFI), donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan } (CFI).}$

c) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (CFI) \iff \vec{n}\cdot\vec{CM} = 0$

$\iff 1\times(x-1) + 2\times(y-1) + 2(z-0) = 0$

$\iff x - 1 + 2y - 2 + 2z = 0$

$\iff \boxed{x + 2y + 2z - 3 = 0}$

Rem : On pourrait aussi tester l'appartenance des pts C, F et I au plan correspondant à l'équation proposée pour conclure qu'il s'agit bien de (CFI).

2) a) $d \perp (CFI)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ dirige d, et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in d$

D'où $\boxed{d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$

b) On peut calculer les coordonnées du pt d'intersection $d \cap (CFI)$ pour retrouver K, ou, comme les coordonnées sont fournies dans l'énoncé, vérifier que $K \in d$ et $K \in (CFI)$

$x_K + 2y_K + 2z_K - 3 = \frac{7}{9} + 2\times\frac{5}{9} + 2\times\frac{5}{9} - 3 = \frac{7}{9} + \frac{10}{9} + \frac{10}{9} - \frac{27}{9} = 0$ donc $K \in (CFI)$

et

$\begin{cases} 1 + t = \frac{7}{9} \\ 1 + 2t = \frac{5}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{7}{9} - 1 \\ 2t = \frac{5}{9} - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{-2}{9} \\ 2t = -\frac{4}{9} \end{cases} \iff t = -\frac{2}{9}$ donc $K \in d$ (pt de paramètre $t = -\frac{2}{9}$)

Donc $\boxed{K\begin{pmatrix}7/9\\5/9\\5/9\end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de } G \text{ sur } (CFI)}$

c) On a $\begin{cases} d \perp (CFI) \\ d = (GK) \\ K \in d \cap (CFI) \end{cases} \Rightarrow d(G\,;(CFI)) = GK = \|\overrightarrow{GK}\|$ avec $\overrightarrow{GK}\begin{pmatrix} -2/9 \\ -4/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$

D'où $d(G\,;(CFI)) = \sqrt{\overrightarrow{GK}^2} = \sqrt{\left(\frac{-2}{9}\right)^2 + \left(\frac{-4}{9}\right)^2 + \left(\frac{-4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9^2} + \frac{16}{9^2} + \frac{16}{9^2}} = \sqrt{\frac{36}{9^2}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$ u.l

3) a) $[IJ]$ est la hauteur du tétraèdre GCFI relative à la base CGF, triangle rectangle en G. D'après l'énoncé, on a $GF = GC = IJ = 1$ u.l.

D'où $V_{GCFI} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{CGF} \times IJ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times GC \times GF \times GI = \frac{1}{6} \times 1^3 = \boxed{\frac{1}{6}}$ u.v.

b) $[GK]$ est la hauteur du tétraèdre GCFI relative à la base CFI.

D'où $V_{GCFI} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{CFI} \times GK$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{CFI} = \dfrac{3 \cdot V_{GCFI}}{GK} = \dfrac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \cancel{3} \times \dfrac{1}{\cancel{6}} \times \dfrac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$ u.a.