Ex1 :

$\boxed{1)\ A}$

$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln x$

$\boxed{2)\ C}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ est une F.I. du type "$0 \times \infty$"

Or $\forall x > 0, \quad g(x) = x^2(1 - \ln x) = x^2 - x^2 \ln x$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0^- \quad \text{(th. croissances comparées)} \end{cases}$

Donc par différence, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0^+$

$\boxed{3)\ D}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 0{,}9x^2 - 0{,}1x$

$= x\,(\underbrace{x^2 - 0{,}9x - 0{,}1})$

$\Delta = (-0{,}9)^2 - 4 \times 1 \times (-0{,}1) = 0{,}81 + 0{,}4 = 1{,}21 > 0$ donc 2 sol. réelles distinctes

Puis $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\underbrace{x^2 - 0{,}9x - 0{,}1 = 0}_{0 \text{ n'est pas sol. et } \Delta > 0}$

Donc l'éq. $f(x) = 0$ a 3 sol. sur $\mathbb{R}$

Rem1 : On pouvait s'affranchir du calcul de Δ en remarquant que le produit $a \times c = 1 \times (-0{,}1) < 0$

Rem2 : Ne pas oublier de vérifier que 0 n'est pas sol. du trinôme du second degré

Rem3 : Attention, sur la calculatrice, le tracé est trompeur si on ne zoome pas suffisamment.

$\boxed{4)\ C}$

Nous ne connaissons pas de formule explicite pour déterminer simplement la primitive d'une composée (ici de la fct $x \mapsto 2x$ par une fct h continue sur $\mathbb{R}$)

Il suffit alors de dériver les fcts données en propositions, avec la formule de la composée qui est, pour rappel : $(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$

Pour a) : $\forall x \in \mathbb{R},\ K'(x) = 2 \times H'(2x) = 2 \times h(2x) \neq h(x)$ ×

Pour b) : $\forall x \in \mathbb{R},\ K'(x) = 2 \times 2 \times H'(2x) = 4 \times h(2x) \neq h(x)$ ×

Pour c) : $\forall x \in \mathbb{R},\ K'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = h(2x) = h(x)$ ✓

Pour d) : $\forall x \in \mathbb{R},\ K'(x) = 2\,H'(x) = 2\,h(x) \neq h(x)$ ×

$\boxed{5)\ B}$

La fct f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x) \cdot e^x$

Puis $f'(1) = (1+1) \times e^1 = 2e$ et $f(1) = 1 \times e^1 = e$

D'où la tgte en 1 a pour éq : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow y = 2e(x-1) + e$

$\Leftrightarrow y = 2ex - e$

$\boxed{6)\ D}$

$0{,}2^n < 0{,}001 \Leftrightarrow \ln(0{,}2^n) < \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n \times \ln 0{,}2 < \ln 0{,}001$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}2}$ car $\ln 0{,}2 < 0$

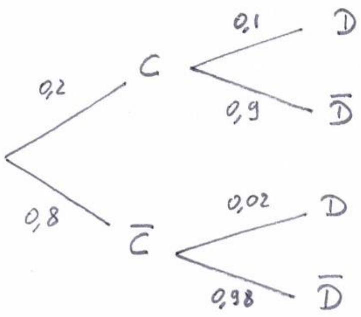
Or $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}2} \simeq 4{,}29$ donc on veut $n \geqslant 5$

<u>Rem</u> : En cas de doute / stress / panique, les questions 2 ; 3 ; 5 et 6 pouvaient être répondues simplement par visualisation sur la calculatrice.

Ex 2 :

⇒ Partie I

1)



$P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0{,}2 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}02}$

2) $\{C \,;\, \overline{C}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D) \\ &= 0{,}02 + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D) \\ &= 0{,}02 + 0{,}8 \times 0{,}02 \\ &= 0{,}02 + 0{,}016 \\ &= \boxed{0{,}036} \end{aligned}$$

3) $P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}036} = \dfrac{20}{36} \boxed{= \dfrac{5}{9} \simeq 0{,}556}$ (à 10^{-3} près)

⇒ Partie II

1) a) On répète $n = 35$ fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le casque présente un défaut de conception" vaut $p = P(D) = 0{,}036$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0{,}036$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(35 \,;\, 0{,}036)}$

b) $P(X=1) = \binom{35}{1} \times p^1 \times (1-p)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34} \simeq \boxed{0,362}$ (à 10^{-3} près)

c) On peut directement utiliser la fonction de répartition de la calculatrice

$\boxed{P(X \leq 1) \simeq 0,639}$ (à 10^{-3} près)

ou $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= \binom{35}{0} \times p^0 \times (1-p)^{35-0} + P(X=1)$

$= 1 \times 1 \times 0,964^{35} + 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$

$\boxed{\simeq 0,639}$ (à 10^{-3} près)

⚠ On ne somme pas deux arrondis !

2) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0,036)$

On veut $P(X \geq 1) > 0,99$ (on pouvant également utiliser $\geq$)

$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0,99$

$\Leftrightarrow P(X=0) < 0,01$

$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times (1-0,036)^{n-0} < 0,01$

$\Leftrightarrow 1 \times 1 \times 0,964^n < 0,01$

$\Leftrightarrow \ln(0,964^n) < \ln 0,01$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow n \ln 0,964 < \ln 0,01$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,964}$ car $\ln 0,964 < 0$

or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,964} \simeq 125,6$

Donc il faudra commander $\boxed{\text{au moins 126 casques}}$.

Ex 3 :

Soit (u_n) : $u_0 = 40$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}008\, u_n\,(200 - u_n)$

1) On veut : $u_1 = 0{,}008 . u_0 . (200 - u_0) = 0{,}008 \times 40 \times (200-40) = 0{,}32 \times 160 = 51{,}2$

Il y aura donc environ $\boxed{\text{51 oiseaux}}$ au début 2022.

Rem : La réponse $\boxed{52}$ devrait également être acceptée si on justifie qu'un oiseau "partiel" (0,2) doit être assimilé à un oiseau entier.

2) Soit f définie sur $[0;100]$ par $f(x) = 0{,}008\, x\,(200-x)$

Puis $f(x) = x \iff 0{,}008x\,(200-x) = x$

$\iff 1{,}6x - 0{,}008x^2 - x = 0$ ⚠ On ne simplifie pas par x.

$\iff 0{,}6x - 0{,}008x^2 = 0$ $\times 10^3$ pour plus de lisibilité

$\iff 600x - 8x^2 = 0$

$\iff -x\,(8x - 600) = 0$

$\iff x = 0$ ou $8x - 600 = 0$ ⚠ Ne pas oublier

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{600}{8} = 75$ ← qui sont dans $[0;100]$

D'où $\boxed{S = \{0\,;\ 75\}}$

3) (a) On peut utiliser la dérivation ou les propriétés des trinômes du second degré.

* Avec la dérivation :

f est dérivable sur $[0;100]$ comme fct polynôme du second degré.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0{,}008\,(1\times(200-x) + x\times(-1)) = 0{,}008\,(200-2x) = 0{,}016\,(100-x)$

Puis $f'(x) \geqslant 0 \iff 0{,}016\,(100-x) \geqslant 0 \iff 100 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 100$

Comme f est définie sur $[0;100]$, $\boxed{f \text{ est donc (strictement) croissante sur } [0;100]}$

x	0		100
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	80

$f(0) = 0{,}008 \times 0 \times (200-0) = \boxed{0}$

et

$f(100) = 0{,}008 \times 100 \times (200-100)$

$= 8 \times 10^{-3} \times 10^2 \times 10^2$

$= \boxed{80}$

* Avec les propriétés du second degré :

$\forall x \in [0;100]$, $f(x) = 0{,}008\,x\,(200-x) = -0{,}008\,x^2 + 1{,}6\,x$

Le coefficient dominant étant négatif, f est donc concave, et admet un maximum pour $x = \alpha = \dfrac{-1{,}6}{2\times(-0{,}008)} = \dfrac{-1{,}6}{-0{,}016} = \dfrac{\cancel{1{,}6}}{\cancel{1{,}6}\times 10^{-2}} = 100$

Puis on dresse le tableau de variations en calculant $f(0)=0$ et $f(100)=80$

(b) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

<u>Initialisation:</u> Pour $n=0$, on a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51{,}2$

donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100$

On a (HR) : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

$\Rightarrow f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100)$ } par croissance de f sur $[0;100]$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 \leqslant 100 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Conclusion:</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100}$

c) D'après la question précédente, on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 100$ donc (u_n) est majorée (par 100)

D'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $l \leqslant 100$.

d) Par unicité de la limite (théorème du point fixe), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n \iff \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

$$\iff f(l) = l$$

Comme f est continue sur $[0;100]$, l est solution de l'éq. $f(x) = x$

D'après la question 2, on a : $l = 0$ ou $l = 75$

Or (u_n) est croissante et $u_0 = 40$, donc nécessairement $\boxed{l = 75}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 75$, ceci signifie que le nombre d'oiseaux va croître jusqu'à atteindre à terme 75 individus.

4) La fonction Python renvoie l'année à partir de laquelle le nombre d'individus atteint 100 oiseaux. Or ceci n'arrivera jamais car nous avons vu dans la question 3) que ce nombre ne peut pas excéder 75.
Ainsi, la condition dans la boucle "while" $(u < 100)$ sera toujours respectée, générant ainsi une boucle infinie (qui ne s'arrête jamais).

Ex4 :

⇒ Partie I

1) Dans le R.O.N. $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a : $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

$\boxed{A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \; ; \; B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

2) On a $\vec{BK}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (BK)

$\vec{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (AIG)

Puis dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases}\vec{BK}\cdot\vec{AI} = -1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = 0 & \text{donc } \vec{BK}\perp\vec{AI}\\ \vec{BK}\cdot\vec{AG} = -1\times 1+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1 = -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0 & \text{donc } \vec{BK}\perp\vec{AG}\end{cases}$$

Ainsi, $\vec{BK}$ est normal à (AIG), d'où $\boxed{(BK)\perp(AIG)}$

3) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{BK}$ $(\vec{n} = -2\vec{BK})$ donc $\vec{n}$ normal à (AIG)

Puis $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (AIG) \iff \vec{n}\cdot\vec{AM} = 0 \iff 2\times(x-0)+(-1)\times(y-0)+(-1)\times(z-0) = 0$

$\iff \boxed{2x-y-z=0}$

Rem : On pouvait également vérifier que les coordonnées des points A ; I et G vérifient l'équation du plan donnée dans l'énoncé.

4) (BK) est dirigée par $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$ et donc par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$, et passe par $B\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

D'où une représentation paramétrique de (BK) : $\boxed{\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

Rem : On pouvait conserver $\overrightarrow{BK}$ au lieu de $\vec{n}$, mais c'était moins fluide...

5) On a $(BK) \perp (AIG)$ donc le projeté orthogonal L du point B sur (AIG) est l'intersection de (BK) et de (AIG). Calculons ses coordonnées :

$$\begin{cases} 2x_L - y_L - z_L = 0 \\ x_L = 1+2t_L \\ y_L = -t_L \\ z_L = -t_L \end{cases} \Rightarrow 2(1+2t_L) - (-t_L) - (-t_L) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 4t_L + t_L + t_L = 0$$

$$\Rightarrow 6t_L = -2$$

$$\Rightarrow t_L = -\frac{1}{3}$$

Puis $\begin{cases} x_L = 1+2t_L = 1+2\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y_L = -t_L = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ z_L = -t_L = \frac{1}{3} \end{cases}$ Donc on a bien $\boxed{L\begin{pmatrix}1/3\\ 1/3\\ 1/3\end{pmatrix}}$

Rem : On pouvait aussi montrer que les coordonnées de L données dans l'énoncé vérifient l'équation cartésienne de (AIG) et la représentation paramétrique de (BK).

6) On a $\begin{cases} B \in (BK) \\ (BK) \perp (AIG) \\ L \in (BK)\cap(AIG) \end{cases}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1/3\\ 1/3\end{pmatrix}$, donc dans le R.O.N., on a :

$$d(B,(AIG)) = BL = \|\overrightarrow{BL}\| = \sqrt{\overrightarrow{BL}^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$\Rightarrow$ Partie II :

1)

ⓐ D'après l'énoncé, $\begin{cases} I \in [EF] \\ [EF] \subset (ABF) \end{cases} \Rightarrow (ABF) = (ABI)$

Comme nous sommes dans un cube, $(GF) \perp (ABF)$ i.e. $(GF) \perp (ABI)$

On a $\begin{cases} \underset{\text{triangle}}{ABI} \subset (ABI) \\ (GF) \perp (ABI) \end{cases}$ donc dans le tétraèdre ABIG,

$\boxed{[GF] \text{ est la hauteur relative à la base } AIB}$

ⓑ $V_{ABIG} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{AIB} \times GF = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AE}{2} \times GF = \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$ (u.v.)

D'une part, l'arête du cube est de longueur 1 donc $GF = 1$

D'autre part, AIB est isocèle en I car I milieu de $[EF]$, donc $\mathcal{A}_{AIB} = \frac{AB \times AE}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

2) Le triangle AIG est isocèle en I (car $AI = IG$)

Donc la hauteur issue de I coupe le côté opposé $[AG]$ en son milieu $O\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, centre du cube.

On a $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ donc $OI = \sqrt{\overrightarrow{OI}^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Puis $\mathcal{A}_{AIG} = \frac{AG \times OI}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$ (u.a)

3) On note $h = d(B ; (AIG))$

D'où $V_{ABIG} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{AIG} \times h \iff h = \frac{3\, V_{ABIG}}{\mathcal{A}_{AIG}} = \frac{\cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{6}_2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \times \frac{\cancel{4}^2}{\sqrt{6}}$

$\iff h = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{6}}{\cancel{6}_3} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$