Ex1 :

1) $\boxed{D}$

D'après l'énoncé, la fonction $g : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

2) $\boxed{C}$

Il s'agit d'une primitive que nous ne savons pas encore calculer.
Il suffit donc de dériver les expressions proposées.

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \neq \ln x$ ✗

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2} \neq \ln x$ ✗

$(x\ln(x) - x)' = 1 \times \ln(x) + \cancel{x} \times \dfrac{1}{\cancel{x}} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ ✓

$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \neq \ln x$ ✗

Rem : Les notations du type $(\ln x)'$ ne sont pas rigoureuses et sont donc à proscrire sur une copie. Elles sont ici acceptables au titre du brouillon

3) $\boxed{A}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ est une F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, il faut donc lever l'indétermination

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1-3^n}{1+2^n} = \dfrac{3^n\left(\frac{1}{3^n}-1\right)}{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)} = \underbrace{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}_{\to +\infty} \times \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \longrightarrow -1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \longrightarrow 1}$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0^+$

Puis par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

4) $\boxed{D}$

f' est croissante sur $[0;2]$ donc f est convexe sur $[0;2]$

Comme $[-2;-1] \not\subset [0;2]$ et $[-1;2] \not\subset [0;2]$, ceci exclut les réponses A et C

f' est décroissante sur $[-2;0]$ donc f est concave sur $[-2;0]$ $\Rightarrow$ Réponse D

Par ailleurs, comme $[0;1] \not\subset [-2;0]$, la réponse B est incorrecte

5) $\boxed{C}$

⚠ Il s'agit de la courbe représentative de f', pas de f

f' change de signe sur $[0;2]$ donc réponse A incorrecte

$f' \geqslant 0$ sur $[-1;0]$ donc réponse B incorrecte

f' s'annule et change de signe (+ vers −) en 1 donc réponse C correcte

La réponse D est incorrecte car le changement de signe (− vers +) indique un minimum en 3.

6) $\boxed{A}$

Du premier coup d'œil, la fonction C est incorrecte car elle renvoie v, et pas n.

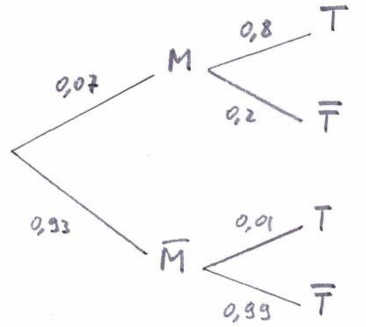
La fonction D ne convient pas non plus car il s'agit d'un test (if) et non d'une boucle conditionnelle (while).

La réponse B est incorrecte car la condition ne permet pas de démarrer la boucle.

Enfin, la réponse A est la mieux adaptée bien qu'elle ne soit pas totalement satisfaisante. En effet, la condition du "while" doit être la négation de ce que l'on souhaite obtenir. Or on veut $v > 200$, donc la condition devrait être $v \leqslant 200$

Ex 2 :

1)



$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}056}$

2) $\{M ; \overline{M}\}$ forme un système complet d'évènements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0{,}056 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 \\ &= 0{,}056 + 0{,}0093 \\ &= \boxed{0{,}0653} \end{aligned}$$

3) Voici une question très surprenante qui, sous une allure d'interprétation d'une mise en situation réelle, tient plus de la compétence de la SVT que des Mathématiques ! Traduisons ces écritures :

$P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu est malade.

$P_T(M)$ est la probabilité que l'individu soit malade sachant que son test est positif.

Ici, deux interprétations s'affrontent… Les professeurs de SVT de lycée et de biologie d'université que j'ai consultés m'ont unanimement affirmé que, d'un point de vue immunologie, la probabilité $P_M(T)$ est plus pertinente (même si $P_T(M)$ est aussi très intéressante). En effet, lors de la mise au point d'un test (qui correspond à la situation de l'énoncé), on teste de nombreuses personnes (malades ou non) puis, pour voir si le test fonctionne bien, on regarde parmi les personnes réellement malades la proportion de test positif (qui doit être très élevée).

Par contre, dans la rédaction de l'exercice, on sent bien que l'on veut nous faire dire que $P_T(M)$ est plus pertinente pour qu'on la calcule dans la question qui suit. Pour le justifier, on pourrait alors raisonner que, dans le cadre d'un dépistage massif, on teste beaucoup de monde et on s'intéresse à la proportion des individus réellement malades parmi ceux testés positifs.

Bref, l'essentiel est de bien rédiger votre réponse et de montrer que vous avez compris ce que signifient ces deux probabilités. Vous n'êtes pas en fac de bio… Je pense que les correcteurs ont eu la consigne de valider toute réponse bien argumentée. Pour preuve que cette question est litigieuse, vous trouverez sur les corrigés du web (sites sérieux) des réponses différentes !

4) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} = \dfrac{560}{653}$ $\boxed{\simeq 0,86}$ (à 10^{-2} près)

5) ⓐ On répète $n = 10$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " l'individu a un test positif " est égale à $p = P(T) = 0,0653$.

Donc X suit la loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(10\ ;\ 0,0653)}$

ⓑ $P(X=2) = \dbinom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^{10-2} = \dbinom{10}{2} \times 0,0653 \times 0,9347^8$ $\boxed{\simeq 0,11}$
(à 10^{-2} près)

6) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ 0,0653)$

On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$ (on pourrait également utiliser $>$)

$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geqslant 0,99$

$\Leftrightarrow P(X=0) \leqslant 0,01$

$\Leftrightarrow \dbinom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} \leqslant 0,01$

$\Leftrightarrow 1 \times 1 \times 0,9347^n \leqslant 0,01$

$\Leftrightarrow \ln(0,9347^n) \leqslant \ln 0,01$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow n \times \ln(0,9347) \leqslant \ln 0,01$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347}$ car $\ln(0,9347) < 0$

or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \simeq 68,2$

Il faut donc tester $\boxed{\text{au minimum 69 personnes.}}$

Ex 3 :

Soit (u_n) : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

1) a) $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}}{4} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

b)

```
def liste(k):
    L = []
    u = 1                      <- initialisation avec la valeur de u0
    for i in range(0, k+1):
        L.append(u)
        u = u / (1 + u)        <- expression de un (par récurrence dans la boucle "for")
    return(L)
```

2) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ ← ⚠ Ne pas oublier sinon le calcul qui suit n'est pas exploitable

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $= \dfrac{u_n}{1+u_n} \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n}$

Puis $u_n > 0 \Rightarrow 1 + u_n > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+u_n} < 1 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

Rem : On pourrait également calculer $u_{n+1} - u_n$ et comparer le résultat à 0.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - \dfrac{u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n}$

Puis comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} u_n^2 > 0 \\ 1+u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-u_n^2}{1+u_n} < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

3) (u_n) est décroissante (strictement) et minorée par 0, donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $l \geqslant 0$

4) Par unicité de la limite, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
(th. du point fixe)

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Par continuité de la fonction associée $x \mapsto \frac{x}{1+x}$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{1+l} = l$$

$$\Leftrightarrow l = l(1+l) \text{ et } 1+l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow l = l + l^2 \text{ et } l \neq -1$$

$$\Leftrightarrow l^2 = 0 \text{ et } l \neq -1$$

$$\Leftrightarrow l = 0$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+}$

5) (a) D'après la question 1, on peut conjecturer que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}}$

(b) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{0+1} = 1 = u_0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \frac{1}{n+1}$ et montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{\cancel{n+1}} \times \dfrac{\cancel{n+1}}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}}$

Ex 4 :

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\6\\1\end{pmatrix}$

D'où $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$

Puis $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -1\times 4 + 1\times 7 + (-3)\times 1 = -4+7-3 = 0$ donc $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

Ainsi, $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A.}}$

Rem : Les nostalgiques pourront utiliser la réciproque du théorème de Pythagore après avoir calculé les longueurs AB ; AC et BC.

ⓑ Dans le R.O.N., on a $\vec{BA}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

Puis $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 1\times 5+(-1)\times 6+3\times 4 = 5-6+12 = \boxed{11}$

$BA = \|\vec{BA}\| = \sqrt{\vec{BA}^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+1+9} = \boxed{\sqrt{11}}$

$BC = \|\vec{BC}\| = \sqrt{\vec{BC}^2} = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{25+36+16} = \boxed{\sqrt{77}}$

ⓒ $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{ABC} = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{BA\times BC} = \dfrac{11}{\sqrt{11}\times\sqrt{77}} = \dfrac{\cancel{11}^{\,1}}{\cancel{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}_{\,1}\times\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

Puis $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)\ \boxed{\simeq 68°}$

⚠ Ne pas oublier de mettre la calculatrice en mode "degré".

2) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, puis dans le R.O.N. :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-1)+(-1)\times 1+(-1)\times(-3) = -2-1+3=0 \quad \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 4+(-1)\times 7+(-1)\times 1 = 8-7-1=0 \quad \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires (ABC est un triangle) qui dirigent le plan (ABC). Donc $\vec{n}$ est normal à (ABC)

Puis $\begin{cases}\vec{n} \text{ normal à } (ABC) \\ \vec{n} \text{ normal à } \mathcal{P}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} \parallel (ABC)}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ normal au plan (ABC), et $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\in(ABC)$

D'où $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$\iff 2(x-2)+(-1)\times(y+1)+(-1)\times(z-0)=0$

$\iff 2x-4-y-1-z=0$

$\iff \boxed{2x-y-z-5=0}$

c) $\mathcal{D}\perp(ABC)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$. De plus, $E\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\in\mathcal{D}$

D'où la représentation paramétrique : $\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

d) H est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et (ABC) car $\mathcal{D}\perp(ABC)$ et $E\in\mathcal{D}$, d'où

$$\begin{cases} 2x_H - y_H - z_H - 5 = 0 \\ x_H = 1+2t_H \\ y_H = 2-t_H \\ z_H = 4-t_H \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(1+2t_H)-(2-t_H)-(4-t_H)-5=0$

$\Rightarrow \cancel{2}+4t_H-\cancel{2}+t_H-4+t_H-5=0$

$\Rightarrow 6t_H = 9$

$\Rightarrow t_H = \frac{9}{6}$

$\Rightarrow t_H = \frac{3}{2}$

Ainsi, H est le point de $\mathcal{D}$ de paramètre $t = \frac{3}{2}$

D'où $\begin{cases} x_H = 1 + \cancel{2}^{1} \times \frac{3}{\cancel{2}} = 1 + 3 = 4 \\ y_H = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ z_H = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{H\begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}}$

Rem : les coordonnées de H étant données dans l'énoncé, on pouvait se contenter de démontrer qu'elles vérifient l'équation cartésienne de (ABC) et la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

3) ABC est rectangle en A, donc avec $AC = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{16+49+1} = \sqrt{66}$,

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{11\sqrt{6}}{2}} \ (u.a.)$$

Puis comme H est le projeté orthogonal de E sur (ABC), [HE] est la hauteur de la pyramide (tétraèdre) ABCE relative à la base ABC.

On a $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Puis $HE = \sqrt{\overrightarrow{HE}^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

Enfin, $\mathcal{V}_{ABCE} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times HE$

$$= \frac{1}{\cancel{3}_1} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \frac{\cancel{3}^1\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{11 \times \cancel{6}^3}{2 \times \cancel{2}_1}$$

$$= \frac{33}{2}$$

$$= \boxed{16{,}5 \ u.v.}$$