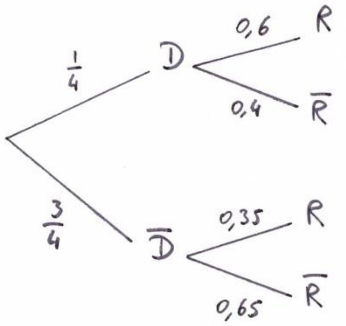
Ex 1 :

1) a)



b) $P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = \frac{3}{4} \times 0,35 = \boxed{0,2625}$

c) $\{D ; \overline{D}\}$ forme un système complet d'évènements

D'après la formule des probabilités totales

$$P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = P(D) \times P_D(R) + 0,2625$$
$$= \frac{1}{4} \times 0,6 + 0,2625$$
$$= 0,15 + 0,2625$$
$$= \boxed{0,4125}$$

d) $P_R(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap R)}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125} = \frac{7}{11}$ $\boxed{\simeq 0,64 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$

2) a) On répète $n = 10$ fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " le tir à 3 points est réussi " est égale à $p = P_{\overline{D}}(R) = 0,35$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(10 ; 0,35)}$

b) $E(X) = n \times p = 10 \times 0,35 = \boxed{3,5}$

En moyenne, sur 10 tirs à 3 pts, elle pourra espérer en marquer entre 3 et 4.

Rem : On pourra préférer dire qu'elle peut espérer marquer en moyenne 35 fois sur 100, ou 7 fois sur 20

c) "Rater 4 tirs ou plus" revient à "réussir 6 tirs ou moins".

On utilise donc la fonction de répartition de la calculatrice pour obtenir :

$\boxed{P(X \leqslant 6) \simeq 0,97}$ (à 10^{-2} près)

d) "Rater au plus 4 tirs" revient à "réussir au moins 6 tirs".

On se ramène encore à la fonction de répartition de la calculatrice :

$P(X \geqslant 6) = 1 - (P X < 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \simeq 1 - 0,91 \boxed{\simeq 0,09}$ (à 10^{-2} près)

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a désormais $X \sim \mathcal{B}(n ; 0,35)$

On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$

$\iff 1 - P(X=0) \geqslant 0,99$

$\iff P(X=0) \leqslant 0,01$

$\iff \binom{n}{0} \times 0,35^0 \times (1-0,35)^{n-0} \leqslant 0,01$

$\iff 1 \times 1 \times 0,65^n \leqslant 0,01$

$\iff 0,65^n \leqslant 0,01$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln(0,65^n) \leqslant \ln 0,01$

$\iff n \times \ln 0,65 \leqslant \ln 0,01$

car $\ln 0,65 < 0$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65}$

Or on a $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \simeq 10,7$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc Stéphanie doit réaliser une série d'au moins $\boxed{n = 11}$ tirs à 3 pts.

Ex 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x.\ln(x) - x - 2$

1) (a) On admet dans l'énoncé que f est dérivable (deux fois) sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \boxed{\ln x}$

(b) On a : $\begin{cases} f(e) = e \times \ln(e) - e - 2 = e \times 1 - e - 2 = e - e - 2 = -2 \\ f'(e) = \ln e = 1 \end{cases}$

Puis T a pour équation : $\quad y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$

$\Leftrightarrow y = 1 \times (x - e) - 2$

$\Leftrightarrow \boxed{y = x - e - 2}$

(c) On admet dans l'énoncé que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \qquad$ car $f'(x) = \ln x$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$

(d) La courbe représentative d'une fonction convexe est située au-dessus de toutes ses tangentes. On a ainsi en particulier $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ au-dessus de } T \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$, avec une $\boxed{\text{intersection au point de coordonnées } \begin{pmatrix} e \\ -2 \end{pmatrix}}$.

2) (a) D'après le th. des croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = 0^-$

Puis par somme, on obtient : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 - 2 = \boxed{-2}$

(b) En $+\infty$, on a une F.I. du type "$\infty - \infty$" que l'on peut lever en factorisant :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x.\ln(x) - x - 2 = x(\ln(x) - 1) - 2$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$ puis par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x) - 1) = +\infty$

Enfin, par somme avec un réel, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

D'où le tableau de variations de f, avec $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 - 2 = 1 \times 0 - 3 = -3$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4) (a) Raisonnons par disjonction de cas :

* Sur $]0;1]$, f est strictement décroissante et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2$

  f est majorée par -2, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

* Sur $]1;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

  On a $f(]1;+\infty[) =]-3;+\infty[$

  Comme $0 \in f(]1;+\infty[)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists! \alpha \in]1;+\infty[$, $f(x) = 0$

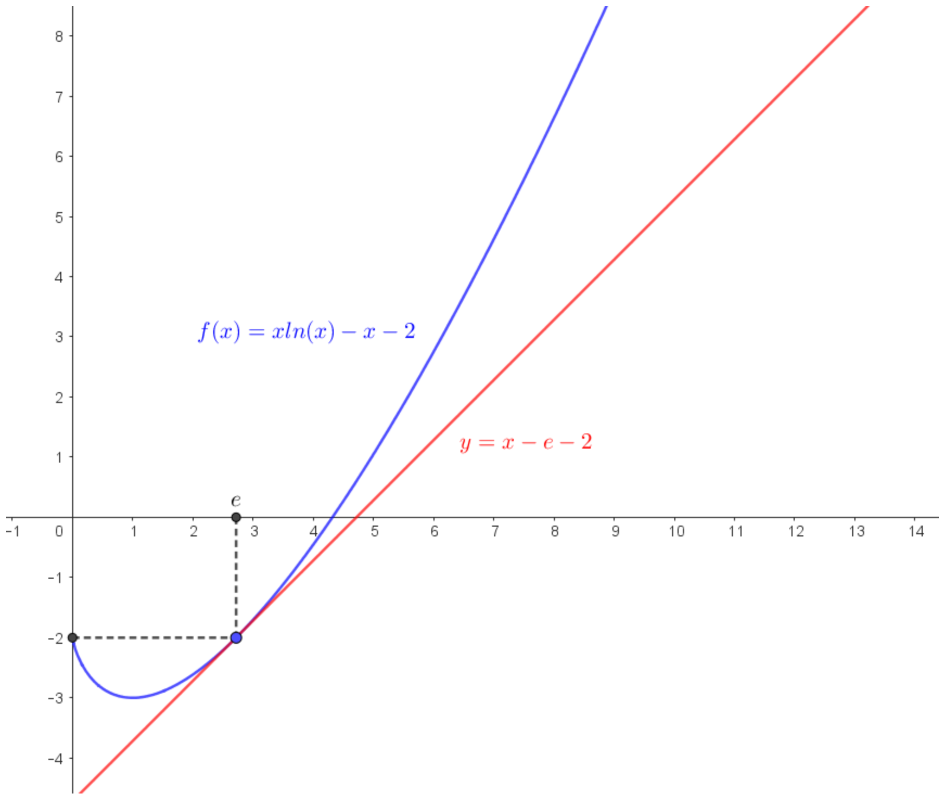
* Conclusion : $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

ⓑ On a $f(4,3) \simeq -0,03 < 0$ et $f(4,4) \simeq 0,12 > 0$

D'après la question précédente, le théorème de Bolzano permet de conclure que $\boxed{\alpha \in \,]4,3\,;\,4,4[}$

ⓒ D'après les questions 3) et 4.a), on en déduit le tableau de signes de f :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	



5) La fonction « *seuil* » permet de déterminer la plus petite valeur de x à partir de laquelle $f(x) \geq 0$ en utilisant une méthode de balayage (grossière) à partir de la valeur 4,3 et avec un pas choisi en argument.

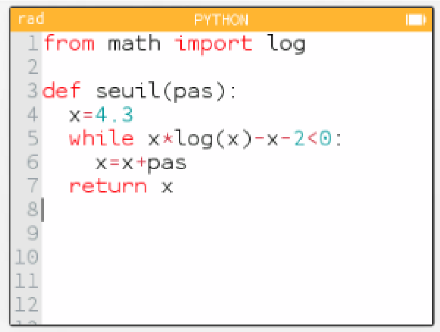
Ainsi, « *seuil* (0.01) » renvoie la borne supérieure de l'encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

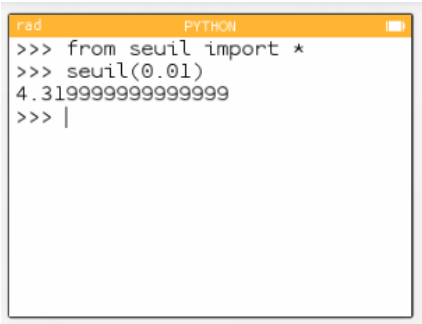
Attention : Ceci ne correspond pas forcément à la valeur approchée de α à 10^{-2} près.

```python
from math import log

def seuil(pas):
    x=4.3
    while x*log(x)-x-2<0:
        x=x+pas
    return x
```

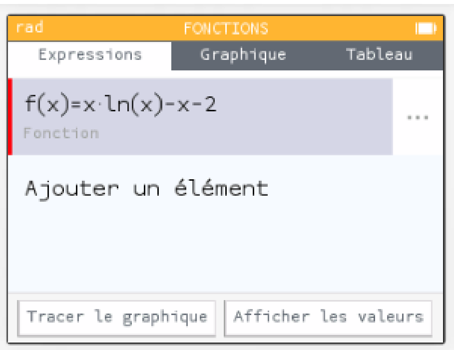
```
>>> seuil(0.01)
4.319999999999999
```

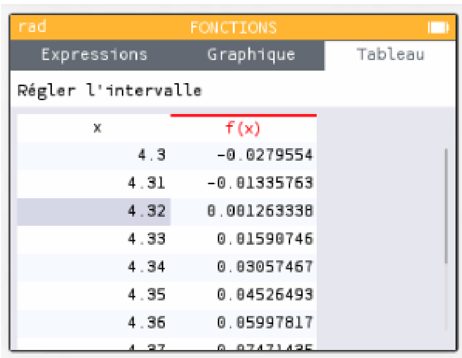




Le résultat surprenant renvoyé dans la console (et donc par votre calculatrice si vous testez le script pendant l'épreuve) doit vous rappeler que Python fonctionne assez mal avec les nombres flottants (i.e. avec les nombres non entiers). Il faut ici comprendre que le programme veut renvoyer la valeur numérique 4.32

Voici ce que renvoie la méthode classique de balayage avec la calculatrice, en prenant pour intervalle d'étude $]4{,}3\,;4{,}4[$ et pour pas $0{,}01$:





x	f(x)
4.3	-0.0279554
4.31	-0.01335763
4.32	0.001263338
4.33	0.01590746
4.34	0.03057467
4.35	0.04526493
4.36	0.05997817

La réponse attendue est donc :

« *seuil* (0.01) » renvoie 4.32 qui est la borne supérieure de l'encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N. $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $\boxed{B\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix} ; E\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} ; F\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}}$

2) On a : $\mathcal{V}_{EFGHS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EFGH} \times h = \frac{1}{3} \times GF \times FE \times (z_S - z_E)$

$= \frac{1}{\cancel{3}_1} \times 4 \times \cancel{6}^2 \times (6-4)$

$= 4 \times 2 \times 2$

$= 16$ u.v.

Puis $\mathcal{V}_{maison} = \mathcal{V}_{ABCDEFGH} + \mathcal{V}_{EFGHS} = AB \times BC \times BF + 16 = 6 \times 4 \times 4 + 16 = 96 + 16 = 112$ u.v.

D'où $\dfrac{\mathcal{V}_{EFGHS}}{\mathcal{V}_{maison}} = \dfrac{16}{112} = \dfrac{16}{7 \times 16} = \boxed{\dfrac{1}{7}}$

3) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FS}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{EF} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{FS} = 0 \times (-3) + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{FS} \end{cases}$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FS}$ non colinéaires qui dirigent le plan (EFS), donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan (EFS)}}$

ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (EFS), donc l'équation cartésienne du plan (EFS) est de la forme : $0 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0 \iff y + z + d = 0$

Puis $E\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} \in (EFS)$, donc $y_E + z_E + d = 0 \iff 4 + 4 + d = 0 \iff d = -8$

D'où (EFS) : $\boxed{y + z - 8 = 0}$

Rem : On pourrait aussi s'assurer que les coordonnées des pts E, F et S vérifient l'équation donnée.

4) ⓐ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (PQ)$ dirigée par $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et passant par $Q\begin{pmatrix}2\\3\\5{,}5\end{pmatrix}$

$\iff \overrightarrow{QM} = t.\vec{k} \quad , t \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x_M - x_Q = t \times 0 \\ y_M - y_Q = t \times 0 \\ z_M - z_Q = t \times 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x_M = x_Q \\ y_M = y_Q \\ z_M = z_Q + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

ⓑ $P \in (EFS) \cap (PQ) \iff \begin{cases} y_P + z_P - 8 = 0 \\ x_P = 2 \\ y_P = 3 \\ z_P = 5{,}5 + t_P \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow 3 + 5{,}5 + t_P - 8 = 0 \\ &\Rightarrow t_P = 8 - 3 - 5{,}5 \\ &\Rightarrow t_P = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$

D'où $\begin{cases} x_P = 2 \\ y_P = 3 \\ z_P = 5{,}5 + (-0{,}5) = 5 \end{cases}$ Ainsi $\boxed{P\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}}$

ⓒ On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\0\\0{,}5\end{pmatrix}$ donc $PQ = \|\overrightarrow{PQ}\| = \boxed{0{,}5}$ u.l.

5) On appelle $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ, et $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dirige (PQ)

$\vec{u}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires, donc Δ et (PQ) ne sont ni parallèles ni confondues.

Recherchons leur éventuel point d'intersection :

Δ et (PQ) sécantes $\iff \exists (t\,;s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2 = -4 + 6s \\ 3 = 7 - 4s \\ 5{,}5 + t = 2 + 4s \end{cases} \iff \begin{cases} 6s = 6 \\ 4s = 4 \\ t = -3{,}5 + 4s \end{cases}$

$\iff \begin{cases} s = 1 \\ s = 1 \\ t = -3{,}5 + 4 = 0{,}5 \end{cases}$ compatibles

Donc $(t\,;s) = (0{,}5\,;1)$ et $\boxed{\Delta \text{ et } (PQ) \text{ se coupent en } N\begin{pmatrix}-4+6\times 1\\7-4\times 1\\2+4\times 1\end{pmatrix} \iff N\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}}$

$Q\begin{pmatrix}2\\3\\5{,}5\end{pmatrix}$ étant le point haut de l'antenne, l'oiseau passera 0,5 u.l. au-dessus sans la percuter

Ex4 :

$\boxed{1)\ D}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \underset{\text{car } n+1>0}{\Rightarrow} \frac{-1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Puis on conclut avec le théorème des gendarmes car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$\boxed{2)\ A}$

$w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln a} + 2 = \frac{1}{e^{2\ln a}} + 2 = \frac{1}{e^{\ln a^2}} + 2 = \frac{1}{a^2} + 2$

Rem : On pouvait aussi utiliser : $e^{x\ln a} = a^x$, donc ici $e^{-2\ln a} = a^{-2}$

$\boxed{3)\ B}$

(v_n) croissante $\Rightarrow v_{n+1} \geqslant v_n \Rightarrow -2v_{n+1} \leqslant -2v_n \Rightarrow e^{-2v_{n+1}} \leqslant e^{-2v_n}$

$\Rightarrow e^{-2v_{n+1}} + 2 \leqslant e^{-2v_n} + 2 \Rightarrow w_{n+1} \leqslant w_n \Rightarrow (w_n)$ décroissante

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-2v_n} > 0 \Rightarrow e^{-2v_n} + 2 > 2 \Rightarrow w_n > 2 \Rightarrow (w_n)$ minorée par 2

$\boxed{4)\ B}$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

Il faut donc utiliser une suite auxiliaire $b_n = a_n + c$ telle que (b_n) soit géométrique.

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = a_{n+1} + c = \frac{1}{3} a_n + \frac{8}{3} + c = \frac{1}{3}(a_n + c) + \frac{8}{3} + c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} b_n + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}c$

Puis (b_n) géométrique $\Leftrightarrow \frac{8}{3} + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}c = \frac{-8}{3} \Leftrightarrow c = -4$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = b_0 \times q^n = (a_0 + c) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = (2-4) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n - 4 \Leftrightarrow a_n = b_n + 4 = 4 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-2}{3^n} + 4$

Rem : Si on ne se rappelait plus de la procédure pour obtenir la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique (vue en DM), on pouvait ici calculer les premiers termes des expressions proposées et les comparer avec les premiers termes de la suite définie par récurrence.

5) B

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{b_n^2+3}\right) \iff b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{2}{b_n^2+3}\right)$

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow b_n^2 + 3 \geqslant 3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{b_n^2+3} \leqslant \frac{1}{3}$

D'où par produit $0 < \frac{2}{b_n^2+3} \leqslant \frac{2}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{b_n^2+3}\right) \leqslant \ln\frac{2}{3} < 0$

$\Rightarrow b_{n+1} - b_n < 0$

$\Rightarrow (b_n)$ strictement décroissante

6) B

On a $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$ puis par quotient, $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{E}_g$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

Puis le théorème des croissances comparées donne immédiatement : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{E}_g$ n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

7) D

Par composition et par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ et y admet donc des primitives

Puis $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x.e^{x^2+1} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1}$

f est de la forme $\frac{1}{2}.u'.e^u$ et admet donc des primitives de la forme $\frac{1}{2}e^u + k$, $k \in \mathbb{R}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$ convient.

Rem : On pouvait également dériver les 4 fonctions proposées.